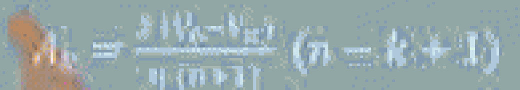
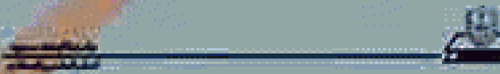
الرياضيات المالية والاكتوارية

تأليف
أ.د. جون بيرو فلار

ترجمة
أ. نوفل سالم القرعي





مقدمة المترجم

في الوقت الذي تزداد فيه المخاطر الاستثمارية، وترتد فيه الأسواق المالية ارتدادات غير مسبوقة بفعل المخاوف من هذه المخاطر، مما يزيد معاناة المستثمرين من مصاعب جمة تنهك مقدراتهم المالية، يبرز قطاع التأمين كأحد المكونات الأساسية في القطاع المالي حيث يوفر للمدخرين والمستثمرين خيارات بديلة تضمن لهم استقرار رأس المال وتنميته.

إن تطور الأساليب الفنية في عمل التأمين، يتطلب – بطبيعة الحال – مزيداً من تطوير الوسائل والأدوات الرياضية التي تحكم هذه الفنيات والأساليب؛ ومن ثمة بدت الحاجة ضرورية لاستخدام البرمجة الحاسوبية؛ لتكون الأداة المساعدة في حل المسائل التأمينية التي يصعب حلها يدوياً.

يستهدف كتاب 'الرياضيات المالية والأكتوارية' طلاب إدارة الأعمال في تخصص التأمين، والأكتواريين، والمختصين في إدارة المحافظ الاستثمارية والثروات والمدخرات. ويحتوي الكتاب على أربعة أجزاء: خصص الجزء الأول منها للرياضيات المالية، والجزء الثاني للرياضيات الأكتوارية، وخصص الجزء الثالث لدراسة أساسيات البرمجة باستخدام (في بي أي إكسل)، أما الجزء الرابع فيتناول دراسة الأدوات الرياضية، والاحتمالات المستخدمة في التأمين.

ونظراً للأهمية التي تنالها الرياضيات الأكتوارية على الصعيدين الأكاديمي والمهني الآن، فقد ارتأينا ترجمة هذا الكتاب، الذي يتميز بنظرته الشاملة، وخصوصيته في تناول الموضوعات التي تبدو للوهلة الأولى معقدة، وغير قابلة للحل، بينما هي في حقيقة الأمر، لا تعدو أن تكون مسائل رياضية بسيطة، يسهل إيجاد حلول لها باستخدام وسائل رياضية معروفة.

ونظراً لنشاط العديد من المؤسسات في العالم العربي في مجال التأمين، وتزايد الاهتمام على المستوى الأكاديمي برياضيات التأمين، وجدنا ضرورة ترجمة هذا الكتاب؛ لتوفير مرجع باللغة العربية، يسهل فهم موضوع الرياضيات الأكتوارية للمهتمين وطلبة إدارة أعمال التأمين، حيث يندر توافر مراجع باللغة العربية في هذا الموضوع.

وقبل الختام أود أن أتقدم بخالص الشكر والتقدير إلى مركز الترجمة بجامعة الملك سعود، على الدعم والتشجيع لمشروع ترجمة هذا الكتاب، كما أتقدم بخالص الشكر والتقدير لكل من ساعد في مراجعة هذا الكتاب، وتحكيمه، وإخراجه إلى النور؛ ليفتح أفقاً جديدةً أمام القارئ العربي، ويسدَّ فراغاً في المكتبة العربية. كما أسأل الله العلي القدير أن ينفع به طالبي العلم والمعرفة على جميع مستوياتهم الأكاديمية والعلمية والثقافية.

والله من وراء القصد..

المترجم

تمهيد

Prèface

الهدف من تأليف هذا الكتاب هو تمكين القارئ من كسب جزء من المعارف الضرورية لعمل التطبيقات والتقنيات المستخدمة حاليا في الرياضيات المالية والأكتوارية.

وهذا الكتاب موجه أساسا لطلاب الإدارة في المدارس التجارية العليا(كليات إدارة الأعمال ومعاهد الإدارة في بعض الدول) ليكون قاعدة أساسية لجميع العمليات الحسابية المالية والأكتوارية.

وقد عمد المؤلف إلى استخدام كلمات سهلة وإثباتات قصيرة ليتمكن من كشف الآليات الأساسية المستخدمة في التأمين على الحياة وكيفية بناء رأس المال دون أن يحتاج القارئ ليكون خبيراً أكتوارياً أو مالياً أو رياضياً.

خطة الكتاب- ينقسم الكتاب إلى أربعة أجزاء:

١- الرياضيات المالية.

٢- الرياضيات الأكتوارية.

٣- أساسيات البرمجة.

٤- ملحق في الرياضيات.

برنامج إكسل والآلة الحاسبة تي آي-٨٣: حاول الكاتب بقدر الإمكان تقريب القواعد المالية للقواعد المستخدمة في برنامج إكسل أو تلك المستخدمة في الآلة الحاسبة تي آي -٨٣. وفي سبيل تبسيط القراءة للقارئ فقد تم وضع شعاري برنامج إكسل والآلة الحاسبة قبل كل فقرة مخصصة لذلك.

التمارين: جميع الفصول التابعة للجزأين الأول والثاني من الكتاب احتوت على سلسلة من التمارين التي تمكن القارئ من مراقبة تحصيله المعرفي، ويوجد من بين حوالي ٢٠٠ تمرين في هذا الكتاب تمارين تطبيقية وأخرى نظرية، وتمت الإشارة إلى التمارين الصعبة أو التي تكتسي أهمية أكبر بالرمز■ .

كما تمت الإشارة إلى عدد صغير من التمارين 'المرحة' بالرمز★. وهناك حلول لجميع التمارين توجد في آخر الكتاب.

البرمجة: خصص الجزء الثالث من الكتاب لأساسيات البرمجة باستخدام لغة الفي بي أي VBA وتي آي - بيسك TI-Basic، وهذه الأساسيات تمكن القارئ والطالب معا من التكيف مع لغة البرمجة. وينتهي الجزء بتقديم تطبيقات يمكن للقارئ تحميلها من خلال الموقع:www.digilex.fr

ACTUXL: برنامج للعمليات المالية والأكتوارية ضمن إكسل.

MATHEIN.8XP وMATHACTU.8XP: برنامجان للعمليات المالية والأكتوارية للآلة الحاسبة تي آي ٨٣ بلاس (TI-83 plus).

ننصح القارئ باستعمال هذه الأدوات كوسيلة للتأكد من التمارين المقترحة وليس كطريقة سهلة لحل التمارين.

ملحق الرياضيات: يحتوي الجزء الأخير من الكتاب على مراجعة لأهم المفاهيم الرياضية الضرورية لفهم العمليات الحسابية المالية والأكتوارية الأساسية.

نصح بقراءة هذه الفصول وخاصة بالنسبة للذين يجهلون قليلا أو كثيرا أو كليا مفاهيم رياضية **كالاحتمالات، واللوغاريتمات، معادلات وحساب المصفوفات.**

الترميز: حاولنا استخدام الرموز المتعارف عليها دوليا قدر المستطاع، ولكننا اضطررنا إلى استخدام رموز أخرى في بعض الحالات لتسهيل القراءة أو للتكيف مع الحالة وعلى سبيل المثال فقد استخدمنا الرمز PC للعلاوة التجارية عوضا عن $P_x^{\prime\prime}$. وقد عرضت جميع الرموز المستخدمة في بداية كل فصل تحت فقرة 'الرموز'.

جداول الحياة: في نهاية الكتاب تم تجميع جداول الحياة السويسرية SM/SF 88-93 كما تم حساب أعداد البدلات المستخرجة من هذه الجداول والتي حسبت بنسبة ٣٪، ويمكن للقارئ أن يستخدم برنامج ACTUXL في حال رغبته في الحصول على جداول حياة أخرى، وهنا نشير إلى الفصل الخامس عشر من الكتاب المخصص لهذا الموضوع.

شكر: أخيراً، أشكر كلاً من:

- مشغلي السابق' المعاشات الشعبية في لوزان' لمساندتهم المالية، الموقع: www.lesrp.ch.
- مشغلي الحالي'المدرسة العليا للتجارة بلوزان' لمساندته المالية وللثقة التي منحها لي.
- الأستاذ الدكتور فرنسوا ديفرسن أستاذ العلوم الأكتوارية بالمدرسة العليا للتجارة بلوزان للنصائح التي قدمها لي في المجال الأكتواري.
- الأستاذ الدكتور نيكولا مارتينيوني لمساعدتي على البدء في استخدام برنامج LATEX.
- السيد باسكال جوزيف، رسام لتوليه تصميم الغلاف.

- صديقي كريستوف سارازان خبير في المعاشات وخريج المدرسة العليا الأكتوارية لنصائحه الفنية والتحريرية.
- زوجتي الرائعة، ميلينا، التي تحملتني طيلة إعداد هذا الكتاب.

الباب الأول

الرياضيات المالية

- الفصل الأول: العمليات الحسابية على التواريخ والفترات
- الفصل الثاني: العمليات الحسابية على الفائدة البسيطة
- الفصل الثالث: العمليات الحسابية على الفائدة المركبة
- الفصل الرابع: الدفعات الدورية(الأقساط)
- الفصل الخامس: القروض
- الفصل السادس: استهلاك الأصول الثابتة

الفصل الأول

العمليات الحسابية على التواريخ والفترات

Calculs de dates et de durées

لمعرفة مبلغ الفائدة على الاستثمار يجب تحديد مدة هذا الاستثمار، تبدأ المرحلة الأولى في الرياضيات المالية والأكتوارية، بـ "حساب" التواريخ والفترات، وإذا كانت بعض البرامج الحاسوبية تستخدم **السنة البسيطة** (365 يوماً) في حساب المدد، فإن بعضها يستخدم **السنة التجارية** (360 يوماً) كما هو الحال عند عديد المؤسسات البنكية.

(1.1) عدد الأيام الفاصلة بين تاريخين

في الأسواق المالية توجد اتفاقية وحيدة محددة للمدد الفاصلة بين التواريخ؛ حيث يتم بموجبها حساب اليوم الأول (تاريخ البدء)، بينما يتم استبعاد اليوم الأخير (تاريخ النهاية أو تاريخ وصول الأجل).

مثال: عدد الأيام الفاصلة بين 15 يوليو و25 يوليو هو 10 أيام.

أهم القواعد الأساسية التي تحكم عمليات حساب الأيام الفاصلة بين التواريخ:

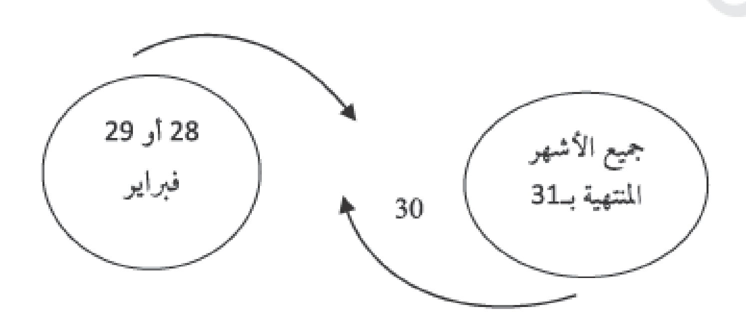
• أساس صحيح/صحيح: الفترة على هذا الأساس توافق عدد الأيام الصحيحة للعملية حسب التقويم. عدد أيام السنة هنا يساوي 365 أو 366 إذا كان

يوم 29 فبراير من بين الأيام المدرجة في السنة. هذه الأساس تسمي كذلك، أساس حالي/ حالي أو أساس أكتواري.

- أساس 360/ صحيح: الفترة في هذا الأساس توافق عدد الأيام الصحيحة للعملية حسب التقويم، عدد أيام السنة هنا يساوي دائما 360 يوما، وهو أساس فرنسي الاستخدام.
- أساس صحيح / 365: في هذه الحالة عدد أيام السنة يساوي دائما 365 بما في ذلك السنة الكبيسة، وهي طريقة حساب مستخدمة بالخصوص عند الدول الأنجلو ساكسوني، وهو بذلك أساس إنجليزي الاستخدام.
- أساس 360/ 30: جميع الأشهر حسب هذا الأساس مكونة من 30 يوما، وجميعها تنتهي بيوم 30. السنة تتكون من 360 يوما و12 شهرا. هذا الأساس يسمى كذلك سنوي 30/ 360. وهو أساس مستخدم كثيرا في العمليات الحسابية المالية. ويوجد لهذا الأساس عدة أشكال نوجزها فيما يلي:

(1.1.1) أساس 360/30: الطريقة الألمانية

وهي لا تتعلق إلا بشهر فبراير، ويفترض أن يكون اليوم الأخير من كل شهر هو الثلاثين ما عدا يوم 28 فبراير في السنة الكبيسة. هذه القاعدة مستخدمة خاصة في ألمانيا وسويسرا وبعض الدول الإسكندينافية.



مثال رقم (1): أوجد عدد الأيام الفاصلة بين يومي 29 فبراير 2004 و 15 أبريل 2004.

الحل

من 29 إلى 30 فبراير	0
مارس 2004	30 يوما
أبريل 2004	15 يوما

0+30+15=45 يوم

مثال رقم (2): أوجد عدد الأيام الفاصلة بين يومي 25 و28 فبراير 2005.

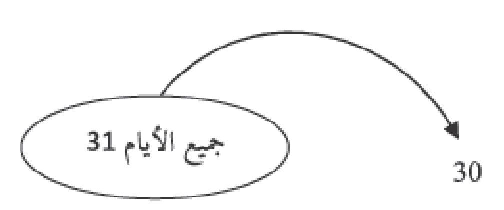
الحل

28 فبراير يعتبر في السنة العادية 30 فبراير لذلك:

30 – 25 = 5 أيام

(1.1.2) أساس 360/30: الطريقة الأوروبية

تواريخ البداية والنهاية الموافقة لـ31 من الشهر تصبح 30 من الشهر ذاته، وهي الطريقة المستخدمة في إكسل.



مثال رقم (1): أوجد عدد الأيام الفاصلة بين يومي 29 فبراير 2004 و 15 أبريل 2004.

الحل

من 29 إلى 30 فبراير	1 يوم
مارس 2004	30 يوما
أبريل 2004	15 يوما

1+30+15=46 يوم

مثال رقم (2): احسب عدد الأيام الفاصلة بين يومي 25 و28 فبراير 2005.

الحل

28– 25 = 3 أيام

إكسل:

توجد في إكسل دالة () DAYS360

B3	=DAYS360(B1,B2)			
	A	B	C	D
1	تاريخ البدء	25/02/2005		
2	تاريخ الإنتهاء	28/02/2005		
3	عدد الأيام	3		

(1.1.3) أساس 360/30 : الطريقة الأمريكية

إذا كان تاريخ البدء هو يوم 31 من الشهر فإن تاريخ البدء يصبح 30 من نفس الشهر. إذا كان تاريخ الانتهاء هو يوم 31 من الشهر فإن تاريخ الانتهاء يصبح يوم 1 من الشهر اللاحق، في المقابل فإن تاريخ الانتهاء يكون يوم 30 من نفس الشهر.

إكسل:

في إكسل توجد دالة () DAYS360، لكن بعد إدخال قيمة '0' في المربع الثالث:

مثال: استخدم إكسل لإيجاد عدد الأيام الفاصلة بين 25 فبراير 2004 و15 أبريل 2004.

الحل

B3 | =DAYS360(B1,B2,0)

	A	B	C	D
1	تاريخ البدء	29/02/2004		
2	تاريخ الإنتهاء	15/04/2004		
3	عدد الأيام	45		

45 يوما

1.1.4) أساس 360/30: قاعدة الحساب

القاعدة العامة لحساب عدد الأيام (N_j) الفاصلة بين تاريخين على أساس 30/ 360 هي التالية:

$$N_j = (D_2-D_1)+30x\ (M_2-M_1)+360x\ (Y_2-Y_1) \quad (1.1)$$

حيث: $D_1/M_1/Y_1$ تاريخ البدء و$D_2/M_2/Y_2$:تاريخ الانتهاء

مثال: احسب باستخدام الطريقتين الألمانية والأوروبية عدد الأيام الفاصلة بين يوم 29 فبراير 2004 و28 فبراير 2005

الحل

تواريخ البدء والانتهاء يجب أن تعدل لتتفق مع الطريقة التي تم اختيارها:

الأوروبية	الألمانية	المعطيات	
29	30	29	D_1
02	02	02	M_1
2004	2004	2004	Y_1
28	30	28	D_2
02	02	02	M_2
2005	2005	2005	Y_2

الطريقة الألمانية:

$N_j = (30-30)+30x\ (02-02)+360x\ (2005-2004) =$ 360يوما

الطريقة الأوروبية:

$N_j = (28-29)+30x\ (02-02)+360x\ (2005-2004) =$ 359 يوما

(1.1.5) أساس صحيح: السنة=365 يوم (السنة البسيطة)

وهو النظام الحسابي المستخدم الأكثر طبيعية ودقة؛ لأنه يعتمد الشهر بـ28 و29 و30 و31 يوما.

إكسل

لا يحتوي إكسل على دالة حسابية مباشرة؛ لذلك نقوم بما يلي:

ندخل في إحدى الخانات تاريخ البدء وفي خانة أخرى تاريخ الانتهاء. ثم نحسب الفرق بين التاريخين. النتيجة تظهر - إذا - في شكل تاريخ.

الأمر الآتي يمكن من إظهار النتيجة في شكل أيام: **تنسيق/خلايا/نمطي** (عندما نستخدم أوفيس 2007 لا نحتاج إلى هذا الأمر لنحصل على النتيجة بعدد الأيام مباشرة)

مثال: استخدم إكسل لحساب الفرق بين 9 فبراير 1967 و15 أبريل 2003.

الحل

يجب إدخال التواريخ على شكل تاريخ (على سبيل المثال: 9.2.1967 أو 9/ 2/ 1967). سوف يقوم إكسل بتحويل التواريخ أعلاه إلى الشكل: 09.02.1967.

نكتب في الخليةB3 القاعدة:B2-B1. ثم نقوم بعمل التنسيق اللازم على الخلية B3 باستخدام الأمر: **تنسيق/خلايا/نمطي**. النتيجة تعطي:13580 يوما.

B3 | f_x =B2-B1

	A	B	C	D
1	تاريخ البدء	09/02/1967		
2	تاريخ الانتهاء	05/04/2004		
3	الأيام	24/02/1937		

B3 | f_x =B2-B1

	A	B	C	D
1	تاريخ البدء	09/02/1967		
2	تاريخ الإنتهاء	15/04/2004		
3	الأيام	13580		

الآلة الحاسبة TI-83

يوجد في هذه الآلة الدالة dbd (begin date, finish date) وتظهر بالشكل dbd (DDMM.YY,DDMM.Yy) ونجدها في القائمة APPS /Finance/ D

مثال: احسب عدد الأيام الفاصلة بين الواحد والثلاثين من ديسمبر 2004 والواحد والثلاثين من ديسمبر 2006.

الحل

يكفي أن نستدعي الدالة () dbd ونتبع التنسيق التالي:

730=dbd (12.3104,12.3106) يوم

(1.1.6) أساس صحيح: قاعدة الحساب

القاعدة التالية تمكّن من حساب صحيح لعدد الأيام الفاصلة بين تاريخين.

لكل تاريخ نرمز بـ'D' لليوم، "M" للشهر و "Y"للسنة. نربط بين هذا التاريخ والرمز 'd' الذي يمثل عدد الأيام الفاصلة بين هذا التاريخ ومصدر معين.

عدد الأيام الفاصلة بين التاريخين 1 و2 هو إذا: d_2-d_1.

الرقم 'd' يمكن الحصول عليه من خلال القاعدة:

إذا كانت M≤2

$$d = 365(Y-1) + INT\left(\frac{Y-1}{4}\right) - INT\left(\frac{Y-1}{100}\right) + INT\left(\frac{Y-1}{400}\right) + 31(M-1) + D \quad (1.2)$$

إذا كانت M>2

$$d = 365(Y-1) + INT\left(\frac{Y}{4}\right) - INT\left(\frac{Y}{100}\right) + INT\left(\frac{Y}{400}\right) + 31(M-1) + D + INT\,(0{,}4M + 2{,}2) \quad (1.3)$$

حيث $INT\,(x)$ تمثل في هذه العبارات أقرب عدد صحيح أصغر من x.

(1.2) نظام تحويل الأزمنة

في هذه الفقرة نذكّر بأهم قواعد تحويل التواريخ.

تحويل السنوات والأشهر والأيام إلى سنوات

ليكن لدينا التاريخ التالي:D/M/Y حيث ترمزY: للسنوات وM: للأشهر وD: للأيام.التحويل إلى سنوات يتم عن طريق القاعدة التالية:

$$Year = Y + \frac{M}{12} + \frac{D}{360} \tag{1.4}$$

تحويل السنوات والأشهر والأيام إلى أشهر

ليكن لدينا التاريخ التالي:D/M/Y حيث ترمزY: للسنوات وM: للأشهر وD: للأيام.التحويل إلى أشهر يتم عن طريق القاعدة التالية:

$$Month = Y \times 12 + M + D \tag{1.5}$$

تحويل السنوات والأشهر والأيام إلى أيام

ليكن لدينا التاريخ التالي:D/M/Y حيث ترمز Y للسنوات وM للأشهر وD للأيام. التحويل إلى أيام يتم عن طريق القاعدة التالية:

$$Days = Y \times 360 + M \times 30 + D \tag{1.6}$$

تحويل عدد سنوات إلى سنوات، أشهر وأيام

ليكن لدينا عدد N من السنوات مكتوب في صورة عشرية و(INT (x العدد الصحيح الأقرب والأصغر من x. التحويل إلى Y سنوات و M أشهر وD أيام يتم عن طريق القاعدة التالية:

$$\begin{aligned} &Year: \quad INT(N) \\ &Month: \ M = INT[12(N-Y)] \\ &Days: \quad D = INT\{30[12(N-Y)-M]\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

مثال رقم (1): قم بتحويل 4 سنوات و3 أشهر و2 أيام إلى سنوات ثم إلى أشهر وأخيرا إلى أيام.

الحل

(أ) التحويل إلى سنوات: $4 + \frac{3}{12} + \frac{2}{360} = 4.2556$ سنوات

(ب) التحويل إلى أشهر: $4 \times 12 + 3 + \frac{2}{30} = 51.0667$ أشهر

(جـ) التحويل إلى أيام: 4x360 +3x30 +2=1532 يوما

مثال رقم (2): قم بتحويل **4.2556** سنوات إلى سنوات/ أشهر/ أيام.

الحل

السنوات: Y = INT (4.2556) = 4

الأشهر: M = INT{12 (4.2556-4)} = INT (12x0.2556) = INT (3.0672) = 3

الأيام: D = INT{30 (12 (4.2556-4)-3)} = INT (30x0.0672) = INT (2.016) = 2

(1.3) حساب العمر

تحسب شركات التأمين أعمار المؤمن لهم حسب عدة طرق، نذكر من أهمها:

حساب العمر باليوم:

نحدد الفترة الزمنية المنقضية (أساس 30/ 360 أو أساس صحيح 365) بين تاريخ ميلاد المؤمن له وتاريخ التعاقد.

حساب العمر بالشهر المكتمل:

نحسب الفترة المنقضية (أساس 30/ 360 أو أساس صحيح 365) بين تاريخ ميلاد المؤمن له وتاريخ التعاقد.ثم نحول النتيجة إلى أشهر ونأخذ العدد الصحيح الأقرب والأصغر.

حساب العمر بالشهر الأقرب:

وهي صيغة أخرى من الطريقة السابقة، حيث يتم اختزال الفترة بالأشهر إلى الوحدة.

حساب العمر بالسنة المكتملة:

نحسب الفترة المنقضية (أساس 30/360 أو أساس صحيح 365) بين تاريخ ميلاد المؤمن له وتاريخ التعاقد. ثم نحوّل النتيجة إلى سنوات ونأخذ العدد الصحيح الأقرب والأصغر.

حساب العمر بالسنة الأقرب:

وهي صيغة أخرى من الطريقة السابقة، حيث يتم اختزال الفترة بالسنوات إلى الوحدة.

مثال: استخدم طريقة الأشهر المكتملة لحساب الفترة المنقضية بين تاريخ ميلاد مؤمن له في 31.01.1980 وتاريخ تعاقده مع شركة التأمين في 08.08.2005

الحل

نستطيع استخدام الدالة() Days360 في إكسل التي سبق الإشارة إليها في الصفحة 7 التي تعطينا عدد 16388 يوما. وعند استخدام القاعدة (1.5) نحول عدد الأيام هذه إلى أشهر، ثم نأخذ العدد الصحيح الأقرب والأصغر من الناتج، وبذلك نحصل على 546 =(546.266) INT شهرا. وأخيرا بالاستعانة بالقاعدة (1.4) نحول عدد الأشهر إلى سنوات أي 45.5 سنة.

(1.3.1) ملاحظات حول الاختزال

نستطيع اختزال عدد x إلى أقرب منه بـ $\frac{1}{n}$ وذلك باستخدام القاعدة التالية:

$$f\ (x, n) = \frac{INT\ (nx + 0,5)}{n} \qquad (1.8)$$

حيث () INT العدد الصحيح الأصغر والأقرب من x

وحيث:

- اختزال x للوحدة: $f(x;1) \Longleftarrow$
- اختزال x إلى رقمين بعد الفاصل (إلى 1/ 100): $f(x;100) \Longleftarrow$
- اختزال x إلى الخمس (إلى 1/ 20) : $f(x;20) \Longleftarrow$
- اختزال x إلى العشر (إلى 1/ 0.1): $f(x;0;1) \Longleftarrow$

إكسل

يتضمن إكسل الدوال الثلاث الآتية التي تمكن من حساب الاختزالات:

- ROUND (number;num_digits)
- ROUNDUP (number;num_digits)
- ROUNDDOWN (number;num_digits)



تي- آي 83 (TI-83)

تتضمن الآلة الحاسبة تي-آي 83 الدالة التالية التي تمكن من احتساب الاختزالات:

- ROUND (number;num_Decimals)

(1.4) التمارين

1- استخدم قاعدة الحساب الألمانية (أساس 30/ 360) لإيجاد عدد الأيام الفاصلة بين التواريخ الآتية:

أ) 7 يناير 2005 و 27 فبراير 2005.

ب) 1 مايو 2006 و 1 نوفمبر 2006.

جـ) 27 فبراير 2006 و 13 يونيو 2006.

د) 15 يناير 2004 و29 فبراير 2004.

هـ) 20 فبراير 2005 و28 فبراير 2005.

2- استخدم طريقة الحساب الأوروبية (أساس 30/ 360) لإيجاد عدد الأيام الفاصلة بين التواريخ التالية:

أ) 30 يونيو 2005 و31 أغسطس 2005.

ب) 1 أبريل 2004 و12 أكتوبر 2004.

جـ) 1 يناير 2008 و29 فبراير 2008.

د) 29 فبراير 2004 و18 يونيو 2004.

هـ) 30 يناير 2006 و 28 فبراير 2006.

3- احسب عدد الأيام الفاصلة بين التواريخ التالية مستخدما القواعد (1.2) و(1.3):

أ) 15 يناير 2008 و29 فبراير 2008.

ب) 30 يناير 2006 و28 فبراير 2006.

جـ) 27 فبراير 2006 و 13 يونيو 2006.

د) 15 فبراير 2004 و 29 يونيو 2008.

4- استخدم برنامج إكسل لحساب عدد الأيام الصحيحة الفاصلة بين التواريخ التالية:

أ) 15 يناير 2008 و 29 فبراير 2008.

ب) 30 يوميو 2006 و 28 فبراير 2006.

جـ) 27 فبراير 2006 و13 يونيو 2006.

د) 15 فبراير 2004 و29 يونيو 2008.

5- استخدم الآلة الحاسبة تي- آي 83 لحساب عدد الأيام الصحيحة الفاصلة بين التواريخ التالية:

أ) 15 يناير 2008 و 29 فبراير 2008.

ب) 30 يوميو 2006 و 28 فبراير 2006.

جـ) 27 فبراير 2006 و13 يونيو 2006.

د) 15 فبراير 2004 و29 يونيو 2008.

6- حول إلى أشهر: 6 أعوام و6 أشهر و6 أيام.

7- حول إلى أيام: 6 أعوام و6 أشهر و6 أيام.

8- حول إلى سنوات: 3 أعوام و4 أشهر و15 يوما.

9- حول إلى أشهر: 46 نصف سنة.

10- حول إلى سنوات: 46 ربع سنة.

11- اكتب السنوات التالية في صورة سنوات/ أشهر/ أيام:

أ) 3.14 سنة.

ب) 12.175 سنة.

جـ) 17.22 سنة.

12- أبرم مؤمن له ولد في 15 أبريل 1963 عقدا بتاريخ 13 يونيو 2005. استخدم الطريقة الأوروبية (أساس 30/ 360) لحساب عمر المؤمن له:

أ) بحساب اليوم.

ب) بالشهر المكتمل.

جـ) بالسنة المكتملة.

د) بأقرب سنة.

13- ■ تستخدم التعاونيات المهنية في سويسرا القاعدة التالية لحساب مجموع المعدلات المستقبلية لمنح الشيخوخة:

$$B_{\ddot{x},s} = \sum_{u=\ddot{x}}^{s-1} b_u + b_s \frac{m}{12}$$

حيث:

s 65 سنة (سن التقاعد).

$\ddot{x}$ عمر المؤمن له (سنة مدنية – سنة الميلاد).

$b_{\ddot{x}}$ معدل منحة الشيخوخة عند بلوغ السن $\ddot{}$ ($b_{\ddot{x}} = 18\%$ عندما تكون $\ddot{x} \geq 55$).

m عدد الأشهر منذ بداية السنة البسيطة إلى أول يوم من الشهر الذي يلحق شهر الميلاد.

احسب $_{\ddot{x},s}$ لمؤمن له ولد في 10 مارس 1943 علما بأن تاريخ حساب العملية هو 4 يونيو 2005.

الفصل الثاني

العمليات الحسابية على الفائدة البسيطة

Opèrations à intérêt simple

الفائدة هي المكافأة التي يحصل عليها من رأس المال (مبلغ معين من المال) حين يتم اقراضه لفترة محددة من الزمن، وهي تسدد مرة واحدة أو على عدة مرات إذا كانت المدة الزمنية التي يقترض فيها طويلة. الفائدة يمكن كذلك تسديدها مسبقا (في بداية الفترة) أو في نهايتها. والفائدة تحدد حسب مدة القرض، المبلغ المقرض ونسبة الفائدة المعتمدة. المدة التي تحسب على أساسها الفائدة هي في أغلب الأحيان السنة، ويمكن استخدام مدد أخرى أقصر من السنة: نصف السنة أو ربع السنة أو حتى الشهر. عندما نتحدث عن الفائدة في النصوص نستعمل رمز النسبة المئوية % بينما في العمليات المالية نستعمل عادة الأرقام العشرية حيث 3.55% تكتب 0.0355.

دون الأخذ في الحسبان أي اعتبارات أخرى سوف نعتمد نظام الحساب أساس 30/ 360.

الرموز:

n فترة القرض

i نسبة الفائدة

I مجموع الفوائد

C_0 رأس المال الأصلي

C_n رأس المال النهائي أو حاصل رأس المال في نهاية الفترة n

مثال: حول نسبة الفائدة التالية $2\frac{3}{4}\%$ إلى الصورة العشرية؟

الحل

$$2\frac{3}{4}\% = 2,75\% = 0,0275$$

(2.1) قواعد الفائدة البسيطة

تطبق الفائدة البسيطة عادة على العمليات المالية التي تكون المدة فيها أقل من سنة.

عمليا يتم تطبيق نسبة الفائدة على مدة سنة، فعندما نقرأ نسبة فائدة تساوي 5% فالمقصود هو نسبة فائدة سنوية تساوي 5%. المدة يجب أن تكون إذاً سنوية.

مثال رقم (1): نسبة الفائدة = 4%،مدة القرض=30 شهر. أوجدn ؟

الحل

نحول الأشهر إلى سنوات: $2,5 = \frac{30}{12}$

وبالتالي فإن: $i = 0,04, n = 2,5$

مثال رقم (2): نسبة الفائدة = 4%، مدة القرض=45 يوما. أوجد n ؟ (أساس 30/ 360).

الحل

نحول الأيام إلى سنوات:$0,125 = \frac{45}{360}$

نبحث أولا عن مقدار الفائدة (I) الذي ينتجه رأس مال (C_0) لاستثمار مدته n فترة.

$$I = C_0 \times n \times i = C_0 n i \quad (2.1)$$

نستطيع التعرف على مقدار رأس المال النهائي المستثمر خلال المدة n والذي يساوي:

$$C_n = C_0 + I \quad (2.2)$$

وبما أن $I = C_0 i n$ فإنه بإمكاننا وضع علاقة مباشرة بين رأس المال الأصلي والنهائي كالآتي: $C_n = C_0 + C_0 n i = C_0\,(1 + n i)$

$$C_n = C_0\,(1 + n i) \quad (2.3)$$

(2.1.1) العلاقات بين المعامل

هذه العلاقات يمكن الحصول عليها بسهولة بعد القيام ببعض التحويرات:

عندما نبحث عن رأس المال الأصلي C_0

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + n i} \quad (2.4)$$

عندما نبحث عن المدة n

$$n = \frac{C_n - C_0}{i C_0} \quad (2.5)$$

عندما نبحث عن نسبة الفائدة i

$$i = \frac{C_n - C_0}{n C_0} \quad (2.6)$$

مثال رقم (1): نستثمر مبلغ 6000 € في حساب يوفر 3%. أوجد رأس المال النهائي بعد 3 أشهر؟

الحل

$C_0 = 5000$ $i = 0,03$ $n = {}^{3}/_{12}$ البحث عن n ؟

$$C_n = 5000\,(1 + \frac{3}{12}0,03) = 5037,50€$$

مثال رقم (2): استثمرنا مبلغ 2500 € لمدة طولها n شهر في حساب يوفر 5%. ما هي مدة هذا الاستثمار إذا كان رأس المال النهائي يقدر بـ 2531,25 ؟

الحل

$C_0 = 2500$ $i = 0,05\,;$ $C_n = 2531,25$ البحث عنn؟

$$n = \frac{C_n - C_0}{iC_0} = \frac{2531,25 - 2500}{0,05 \times 2500} = 0,25$$ سنة

الإجابة: 0,25 x 12=3 أشهر

مثال رقم (3): أودعنا 2500 € في حساب توفير لمدة 3 أشهر. أوجد نسبة الفائدة إذا كان رأس المال النهائي يبلغ 2531,25 €؟

الحل

$C_0 = 2500$ $n = \frac{3}{12} = 0,25\,;$ $C_n = 2531,25$ البحث عنi؟

$$i = \frac{C_n - C_0}{nC_0} = \frac{2531,25 - 2500}{0,25 \times 2500} = 0,05$$

الإجابة: 0,05=5%

(2.2) المعدل التناسبي

تمتاز الفائدة البسيطة بكونها تناسبية مع مدة الاستثمار. إذا كانت نسبة الفائدة 12% سنويا فهي مساوية لـ1% شهريا. لكن هذه الخاصية لن تحقق بالنسبة للفائدة المركبة.

المعدل التناسبي هو -إذن- المعدل الذي يحقق نفس العائد (الفائدة البسيطة) لمبلغ محدد خلال مدة محددة.

الرموز:

i_m نسبة الفائدة التي تسدد في الفترة m

الجدول التالي يبين رموز نسب الفوائد حسب الفترة التي يطبق فيها:

الفترة	m	i_m
سنوية	1	i
نصف سنوية	2	i_2
ربع سنوية	4	i_4
شهرية	12	i_{12}

من خلال الجدول المبين أعلاه نستطيع كتابة العلاقة التالية:

$$\underbrace{C_0(1+i)}_{\text{الفائدة البسيطة السنوية}} = \underbrace{C_o(1+i_m m)}_{\text{الفوائد البسيطة المدفوعة على عدد } m \text{ مرات}}$$

وهذا يمكّننا من كتابة العلاقة التي تربط بين m و i :

$$\boxed{i_m = \frac{i}{m}} \qquad (2.7)$$

$$\boxed{i = i_m m} \qquad (2.8)$$

مثال رقم (1): أوجد نسبة الفائدة الشهرية التي تعادل نسبة فائدة سنوية بـ12%؟

الحل

$i = 12\%$ إذا $_{12} = \frac{i}{12} = \frac{0,12}{12} = 0,01 = 1\%$

مثال رقم (2): أوجد نسبة الفائدة الشهرية التي تعادل نسبة فائدة نصف سنوية بـ3%؟

الحل

لدينا $_2 = 0,03$ ونبحث عن i_{12}. نتحول أولا إلى النسبة السنوية ثم نحولها إلى نسبة شهرية: $i = 2\,i_2 = 0.06$ ثم نتحول إلى النسبة الشهرية:

$$i_{12} = \frac{i}{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005 = 0,5\%$$

(2.3) متوسط معدل الفائدة لعدد من الاستثمارات

لنفترض أنه تم استثمار مجموعة من المبالغ على فترات مختلفة وبنسب فوائد مختلفة أيضا، في هذه الحالة يمكن حساب نسبة الفائدة المتوسطة لمجموع الاستثمارات الذي يرمز له بـT .

C_t : المبلغ المستثمر رقم t.

i_t : نسبة الفائدة المستخدمة رقم t.

n_t : طول فترة الاستثمار رقم t.

k : عدد المبالغ المستثمرة.

T: نسبة الفائدة المتوسطة لجميع المبالغ المستثمرة.

القاعدة التالية تمثل قاعدة المتوسط الحسابي البسيط المرجح:

$$T = \frac{C_1 i_1 n_1 + C_2 i_2 n_2 + \cdots + C_k i_k n_k}{C_1 n_1 + C_2 n_2 + \cdots + C_k n_k}$$

$$T = \frac{\sum_{t=1}^{k} C_t i_t n_t}{\sum_{t=1}^{k} C_t n_t} \qquad (2.9)$$

مثال: أوجد النسبة المتوسطة لمجموعة الاستثمارات التالية:

المبلغ المستثمر	الفترة	النسبة
€ 1000	90 يوما	%3
€ 2000	120 يوما	%4
€ 3000	170 يوما	%5

الحل

$$T = \frac{1000\times 0{,}03\times\frac{90}{360}+2000\times 0{,}04\times\frac{120}{360}+3000\times 0{,}05\times\frac{170}{360}}{1000\times\frac{90}{360}+2000\times\frac{120}{360}+3000\times\frac{170}{360}}$$

$$T = \frac{105}{2333{,}33} = 0{,}045 = 4{,}5\%$$

(2.4) طريقة الأعداد والمقامات الثابتة

نستخدم هذه الطريقة في حال البحث عن مقدار الفائدة الكلية المستخرجة من مجموعة من المبالغ المستثمرة بنسب فوائد متساوية.

الرموز:

C_t : المبلغ المستثمر رقم t.

n_t : طول فترة الاستثمار رقم t.

i: نسبة الفائدة المشتركة بين جميع الاستثمارات.

k : عدد المبالغ المستثمرة.

I_{TOT}: مقدار الفائدة الكلية لجميع الاستثمارات.

يحسب مقدار الفائدة الكلية على النحو التالي:

$$\begin{aligned} I_{TOT} &= C_1 i n_1 + C_2 i n_2 + \cdots + C_k i n_k \\ &= i(C_1 n_1 + C_2 n_2 + \cdots + C_k n_k) \\ &= i\sum_{t=1}^{k} C_t n_t \end{aligned}$$

$$I_{TOT} = i \underbrace{\sum_{t=1}^{k} C_t n_t}_{\text{الأعداد}} \qquad (2.10)$$

مثال: أوجد نسبة الفائدة الكلية لثلاثة مبالغ مستثمرة على النحو التالي:

المبلغ المستثمر	الفترة	النسبة
€ 1000	90 يوما	%3
€ 2000	120 يوما	%3
€ 3000	170 يوما	%3

الحل

$$I_{TOT} = 0{,}03 \times \left(1000 \times \frac{90}{360} + 2000 \times \frac{120}{360} + 3000 \times \frac{170}{360}\right)$$

$$I_{TOT} = 0{,}03 \times 2333{,}33 = 70\ €$$

ملاحظة: هذه الطريقة تستخدم عادة الفترات بالأيام وهو ما مكن – كما يبين المثال– من كتابة الكسر: $\frac{1}{360}$ وبذلك نحصل على:

$$I_{TOT} = \frac{0{,}03}{360} \times 840000 = 70\ €$$

في هذه العملية الحسابية سمي الكسر $\frac{0{,}03}{360}$ بالمقام الثابت وهي التسمية التي وصفت بها الطريقة المبينة.

(2.5) الخصم التجاري

يهدف الخصم التجاري الذي يمنحه البائع للمشتري إلى تشجيع هذا الأخير إلى تسديد التزاماته بأسرع وقت. ويمكن أن نشاهد خصومات تتراوح بين 2% و 5% لتسديد الفواتير في آجال لا تتعدى العشرة أيام أو صافي 30 يوما.

يجب على المشتري أن يستفيد من هذه الخصومات. وفي حال عدم الاستفادة منها فهو بطريقة مباشرة يتحول إلى مقترض بنسبة فائدة عالية طيلة 20 يوما.

الرموز:

C_0 : المبلغ بما في ذلك الخصم.

C_n : المبلغ دون الخصم.

n : المدة دون الاستفادة من الخصم.

t: معدل الخصم.

i : نسبة الفائدة في حال التخلي عن الخصم.

المبلغ بما في ذلك الخصم هو:

$$C_0 = C_n + tC_n = (1-t)C_n$$

مع استخدام القاعدة (3.4) يمكن أن نحصل على:

$$i = \frac{C_n - C_n(1-t)}{nC_n(1-t)} = \frac{1-(1-t)}{n(1-t)}$$

أي:

$$i = \frac{t}{n(1-t)} \qquad (2.11)$$

من خلال هذه المعادلة يتبين أن نسبة الفائدة الضمنية (i) يحددها معدل الخصم نفسه وكذلك المدة الزمنية التي انقضت دون الاستفادة من الخصم.

مثال: أوجد نسبة الفائدة الضمنية المتعلقة بخصم يساوي 1% لمدة زمنية لا تتعدى 10 أيام أو صافي 30 يوما.

الحل

$t = 0{,}01$ و يوما دون خصم $20 = \frac{20}{360} = n$

وهكذا فإن: $i = \frac{0{,}01}{20/360 \times (1-0{,}01)} = \frac{0{,}01}{0{,}055} = 0{,}1818 \simeq 18\%$

(2.6) التمارين

1- استثمرنا مبلغ 2000 € خلال الفترة الممتدة من 10 يناير إلى 8 سبتمبر 2005 في حساب يوفر 3% سنويا. أوجد مقدار الفائدة التي حصلنا عليها في هذه العملية مستخدما أساس 30/ 360 وأساس صحيح/ 365؟

2- استثمرنا مبلغ 5000 € خلال الفترة الممتدة من 5 مارس إلى 15 أغسطس 2005 في حساب يوفر 2% نصف سنويا. أوجد المبلغ (رأس المال) النهائي الذي حصلنا عليه في هذه العملية مستخدما أساس 30/ 360 وأساس صحيح/ 365؟

3- استثمرنا مبلغ 3000 frs (فرنك سويسري) بنسبة فائدة 3% كل نصف سنة فحصلنا في نهاية المطاف على مبلغ قدره 3035 frs. ما هي المدة المنقضية على استثمار المبلغ المذكور بالأشهر والأيام؟ (استخدم أساس 30/ 360).

4- استثمر مبلغ 5000 € من الفترة المتراوحة بين 1 يناير و14 سبتمبر 2005 فأنتج مبلغا آخر قدره 5140 €.أوجد نسبة الفائدة السنوية المستخدمة في هذه العملية؟ (أساس 30/ 360).

5- اقترضنا مبلغ 6000 frs بنسبة فائدة 4.5% في 1 أبريل. إذا رغبنا في تسديد مقدار فائدة لا يتعدى 100 frs فما هو تاريخ إرجاع القرض؟ (أساس 30/ 360).

6- ما هي نسبة الفائدة الربع سنوية المعادلة لنسبة الفائدة الشهرية المقدرة بـ1%؟

7- استثمر مبلغ 1000€ لمدة 3 أشهر فأنتج فائدة مقدارها 36 €. ما نسبة الفائدة الشهرية لهذه العملية؟ (أساس 30/ 360).

8- اشترينا آلة ودفعنا 30% من سعرها عند التسليم أما الباقي فقد تقرر تسديده بعد 3 أشهر بفائدة تأخير تقدر بـ210€ .أوجد نسبة الفائدة الموظفة إذا سددنا مبلغ 2400€ عند التسليم؟

9- يمتلك شخص مبلغا كبيرا في حساب يوفر له 4% . إذا كان الشخص يقوم بسحب مبلغ شهري بـ4000€ دون أي تأثير في مقدار هذا المبلغ. فما هي قيمة المبلغ الموجود في الحساب؟ (أساس 30/ 360).

10- استثمر شخص مبلغ 3000 frs بنسبة فائدة 3%.بعد فترة سحب المبلغ المستثمر بفوائده. إذا علمت أن البنك أخذ عمولة تقدر بـ frs30 وأن المبلغ الإضافي الذي سحب يعادل المبلغ المستثمر في بداية الفترة. احسب فترة الاستثمار؟ (أساس 30/ 360).

11- احسب نسبة الفائدة المتوسطة للمبالغ المستثمرة التالية المودعة في سنة 2004 (أساس 30/ 360):

مبلغ الاستثمار	الفترة	النسبة
8000 frs	من 1 يناير إلى 31 مارس	%3
6000 frs	من 1 يناير إلى 30 يونيو	%3,5
4000 frs	من 1 يونيو إلى 30 سبتمبر	%4

12- احسب نسبة الفائدة المتوسطة للمبالغ المستثمرة التالية:

مبلغ الاستثمار	الفترة	النسبة
X	N2	I
X2	N	i2

13- استخدم طريقة الأعداد أساس 30/ 360 لإيجاد مقدار الفائدة الإجمالية لمجموعة الاستثمارات التالية المودعة بنسبة 3,75%:

مبلغ الاستثمار	الفترة
frs 4000	من 01.02.05 إلى 15.03.05
frs 4400	من 01.02.05 إلى 31.10.05
frs 4800	من 01.02.05 إلى 31.12.05

14- استثمر رأس مال بنسبة فائدة 4% فأنتج frs 3080. واستثمر نفس المبلغ بنسبة فائدة 5% فأنتج frs 3100.أوجد كلاً من مدة الاستثمار ومقدار رأس المال المستثمر؟ (أساس 30/ 360).

15- ■ استثمر مبلغان يقدر إجماليهما بـ10000 € الأول بنسبة فائدة x% والثاني بنسبة فائدة $(x+1)$%. وتقدر أرباح الفائدة من الاستثمار الأول بـ240 € بينما تقدر بالنسبة للاستثمار الثاني بـ200 € فقط. أوجد هاتين النسبتين وكذلك مقداري الاستثمارين. (أساس 30/ 260).

16- ■نودع مبلغ x عند بداية كل شهر في حساب توفير بنكي يوفر لنا 4%. (أساس 30/ 360).

(أ) ما هو المبلغ المتحصل عليه في نهاية الشهر الرابع؟

(ب) ما هو المبلغ المتحصل عليه في نهاية الشهر n؟

نصيحة: مجموع الأعداد الصحيحة التي تنتهي في n تساوي $\frac{(n+1)}{2}$

17- احسب النسبة الضمنية i المتعلقة بخصم يساوي 2% على تأخير تسديد يقدر بـ 10 أيام أو 60 يوما صافيا.

الفصل الثالث

العمليات الحسابية على الفائدة المركبة

Opérations à intérêt composé

عندما يستثمر رأس مال بنسبة فائدة مركبة فذلك معناه أن كل مقدار فائدة يحصل عليه بعد كل فترة يتم إضافته إلى مقدار رأس المال الأصلي ليصبح بدوره مصدرا لأرباح الفائدة. هذا المبدأ الأساسي في الرياضيات المالية يسمى "تحويل الفوائد إلى رأس مال".

وعلى عكس الفوائد البسيطة فإن الفوائد المركبة تنطبق على الفترات الزمنية التي تزيد عن السنة.

كقاعدة عامة يتم صرف (استخلاص) الفوائد إثر نهاية فترة الاستثمار.

إذا لم يتم تحديد الفترة الزمنية فهي تساوي ضمنيا السنة، حيث يمكن القول إن استثمارا حقق 5% ونعني بذلك أن الفائدة المحققة هي سنوية.

في كل المواضيع التي سنتناولها لاحقا في هذا الكتاب سوف نتعامل مع العمليات الحسابية على الفائدة المركبة.

الرموز:

جميع الرموز المستخدمة في الفصل السابق تبقى صالحة لهذا الفصل:

n فترة القرض.

i نسبة الفائدة.

C_0 رأس المال الأصلي.

C_n رأس المال النهائي أو رأس المال المتحصل عليه عند نهاية الفترة n.

(3.1) قواعد الفائدة المركبة

عند كل فترة تحسب الفائدة على رأس المال المتراكم النهائي. وبذلك نستطيع تركيب العلاقة بين رأس المال الأصلي والنهائي على النحو التالي:

رأس المال المتحصل عليه بعد نهاية السنة الأولى:

$$C_1 = C_0 + C_0 i = C_0\,(1+i)$$

رأس المال المتحصل عليه بعد نهاية السنة الثانية:

$$C_2 = C_1 + C_1 i = C_1(1+i) = C_0(1+i)^2$$

رأس المال المتحصل عليه بعد نهاية السنة n:

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-1} i = C_{n-1}(1+i) = C_0(1+i)^n$$

وهو ما يعطينا القاعدة العامة للفائدة المركبة:

$$C_n = C_0(1+i)^{n-1} \qquad (3.1)$$

مثال رقم (1): استثمرنا مبلغ 5000 € لمدة 20 سنة في حساب يوفر لنا 2%. ما مقدار رأس المال في نهاية المدة المذكورة؟

الحل

$C_0 = 5'000$ $i = 0{,}02$ $n = 20$ البحث عن n ؟

$$C_n = 5'000\,(1+0{,}02)^{20} = 5'000 \times 1{,}02^{20} = 7'429{,}74€$$

مثال رقم (2): نستثمر مبلغ 12000 € لمدة 5 سنوات و3 أشهر و6 أيام في حساب يوفر 5%. ما مقدار رأس المال في نهاية المدة المذكورة؟

الحل

$C_0 = 12'000$ $i = 0,05$ $n = 5 + \frac{3}{12} + \frac{6}{360} = 5,2666$ البحث عن n ؟

$$C_n = 12'000\,(1 + 0,05)^{5,2666} = 15'515,94€$$

(3.1.1) العلاقات بين المعامل

هذه العلاقات نحصل عليها بسهولة من خلال عمليات التحويل البسيطة. ومعرفة مسبقة ببعض القواعد المستخدمة في اللوغاريتمات هي ضرورية للبحث عن الفترات والمدد:

البحث عن رأس المال الأصلي:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad (3.2)$$

البحث عن المدة n

$$n = \frac{\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\ln(1+i)} \qquad (3.3)$$

البحث عن نسبة الفائدة i

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 \qquad (3.4)$$

مثال رقم (1): لدينا مبلغ قدره 3582,15 € حصلنا عليه بعد إيداع مبلغ قبل 6 سنوات في حساب توفير بنسبة 3%. ما هو المبلغ الذي تم إيداعه؟

الحل

$C_n = 3'582,15$ $i = 0,03$ $n = 6$ البحث عن C_0؟

$$C_0 = \frac{3'582,15}{(1,03)^6} = 3'000€$$

مثال رقم (2): أودعنا رأس مال في حساب توفير لمدة 20 سنة فحصلنا على ضعف المبلغ المودع. ما هي نسبة الفائدة الموظفة على رأس المال؟

الحل

$C_0 = C_0, C_n = 2C_0, n = 20$ البحث عن i؟

$$i = \sqrt[20]{\frac{2C_0}{C_0}} - 1 = \sqrt[20]{2}-1=0,0526=3,526\%$$

مثال رقم (3): أودع مستثمر مبلغ 50000 frs في حساب يوفر له 2,5 %. ثم سحب المبلغ المستثمر بعد أن وصلت قيمته إلى 53000 frs. أوجد مدة الاستثمار؟

الحل

$C_0 = 50'000, C_n = 53'000, i = 0,025$ البحث عن n؟

$$n = \frac{ln\left(\frac{53000}{50000}\right)}{ln\,(1,025)} = 2,35977 \text{ سنوات}$$

إكسل

يجب أخذ الحيطة اللازمة عند التعامل مع الدوال المالية في إكسل. وفيما يلي القواعد التي يتضمنها الكتاب والمرادف لها في برنامج إكسل.

$$C_n = FV(i; n; 0; -C_0; 0) \;\Leftrightarrow\; C_n = C_0(1+i)^n$$

$$i = RATE(n; 0; -C_0; C_n; 0) \Leftrightarrow\; i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1$$

$$n = NPER(i; 0; -C_0; C_n; 0) \;\Leftrightarrow\; n = \frac{\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{\ln\,(1+i)}$$

$$C_n = PV(1; n; 0; C_n; 0) \;\Leftrightarrow\; C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

مثال: أودع مستثمر مبلغ frs 50000 في حساب يوفر 3% سنويا.ثم سحب رأس ماله عندما بلغ frs 53000. ما هي المدة التي بقي فيها المبلغ المستثمر في الحساب المذكور؟

الحل

$i = 0{,}025, C_n = 53000, C_0 = 50000$ البحث عن n؟

سنوات $n = NPER(0{,}025; 0; -50000; 53000; 0) = 2{,}35977$



الآلة الحاسبة TI-83

تتضمن الآلة الحاسبة تي-83 برنامجا للحلول المالية. يكفي أن نضغط على [APPS] [Finance 1:] ثم [TVM Solver] بعد ذلك نقوم بإدخال العوامل التالية حسب متطلبات المسألة:

N=n
1%=$i \times$ 1001
PV=$-C_0$
PMT=0
FV=C_n
P/Y=1
C/Y=1
PMT:END

ثم نضع المؤشر بعد ذلك على الرمز الذي نرغب في البحث عن قيمة له، ثم نضغط على: [ALPHA] ، [SOLVE]

مثال: أودع مستثمر مبلغ frs 50000 في حساب يوفر 3% سنويا.ثم سحب رأس ماله عندما بلغ frs 53000. ما هي المدة التي بقي فيها المبلغ المستثمر في الحساب المذكور؟

الحل

نقوم بإدخال القيم التالية كمعامل ثم نضع المؤشر على مستوى N=1 ونضغط على ALPHA ، SOLVE وهو ما يعطينا النتائج الآتية:

N=1
1%=2,5
PV=−50000
PMT=0
FV=53000
P/Y=1
C/Y=1
PMT:END

(3.2) عامل تحويل رأس المال والخصم

يوجد في الرياضيات المالية أو الأكتوارية مفهومان أساسيان هما: القيمة الحالية والقيمة المستقبلية أو القيمة المتحصل عليها من خلال رأس مال.

عندما نجيب على السؤال: "ما هو المبلغ المتحصل عليه بعد إيداع – لمدة محددة – مبلغ X في حساب توفير" فنحن قصدنا البحث عن القيمة المستقبلية أو المتحصل عليها لرأس مال. نتحدث إذاً عن عملية تحويل لرأس مال.

في المقابل عندما نجيب على السؤال: "ما هو رأس المال الذي وجب إيداعه اليوم في حساب توفير لكي نحصل – بعد مرور فترة من الزمن – على رأس مال X؟ فنحن قصدنا البحث عن القيمة الحالية لرأس مال. نتحدث إذا عن عملية خصم.

تعريفات:

نرمز لعامل تحويل رأس المال بالحرف r ولعامل الخصم بالحرف v، والعلاقة التي تربط هذين العاملين هي:

$$r = 1 + i \quad (3.5)$$

و

$$v = \frac{1}{1+i} \quad (3.6)$$

وهذه العلاقة تكتب كذلك: $v = \frac{1}{r} = r^{-1}$

كما يمكننا كتابة قاعدة تحويل رأس المال المرقمة (3.1) كما يلي:

$$C_n = C_0 r^n \quad (3.7)$$

كذلك يمكننا كتابة رأس المال الأصلي باستخدام عامل الخصم v حيث:

$$C_n = \frac{C_0}{r^n} = C_0 \frac{1}{r^n} = C_0 \left(\frac{1}{r}\right)^n = C_0 v^n$$

أي:

$$C_n = C_0 v^n \quad (3.8)$$

وهذا يجعل حساب القيمة الحالية أو القيمة المستقبلية سهلة حيث يكفي أن نضرب رأس المال النهائي أو الأصلي بعامل الخصم أو بعامل تحويل رأس المال مرفوع إلى n.

مثال رقم (1): حول رأس المال المقدر بـ 6000 frs مستخدما نسبة الفائدة المركبة 3.2% ومدة 4 سنوات ونصف؟

الحل

$$n = 4{,}5, r = 1 + i = 1 + 0{,}032, C_0 = 6'000$$

$$C_n = 6'000 \times 1{,}032^{4{,}5} = 6'913{,}69\ frs$$

مثال رقم (2): أوجد القيمة الحالية لرأس مال يبلغ 10000 € مدفوع بعد 20 سنة بنسبة فائدة تقدر بـ4%؟

الحل

$v=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{1,04}=0,96153846\ C_n=10000\ n=20\ C_n=?$

$C_0=10000\times 0,96153846^{20}=4563,87\ €$

مثال رقم (3): حساب مبلغ قبل توظيف الضريبة على القيمة المضافة هي عملية مرادفة لحساب تحديث رأس المال على سنة. أوجد المبلغ قبل توظيف الضريبة على القيمة المضافة لسيارة ثمنها 24748 €–ضريبة القيمة المضافة مضمنة له– إذا كانت نسبة الضريبة على القيمة المضافة هي 7,6 %

الحل

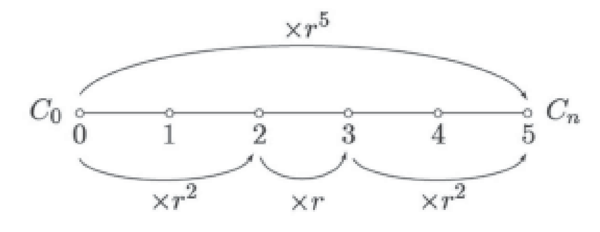
$v=\frac{1}{1+0,076}=\frac{1}{1,076}$ المبلغ دون الضريبة على القيمة المضافة هو إذاً:

$\frac{24748}{1,076}=23000\ \text{frs}$

(3.3) العمليات المتسلسلة

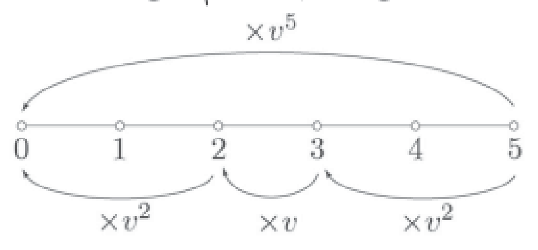
عند تطبيق قاعدة جمع الأسس الجبرية $x^a x^b=x^{a+b}$ على عوامل الخصم أو على عوامل تحويل رأس المال، يصبح بالإمكان عمل تسلسل للعمليات، وهذا يرجع إلى عمل خصومات أو تحويل رأس مال على مراحل.

كمثال على ذلك عملية تحويل رأس مال على فترة 5 سنوات توافق عملية تحويله على سنتين ثم على سنة ثم على سنتين والرسم التالي يوضح ذلك:



وبذلك فإن: $C_0r^5\ C_n=C_0r^2rr^2$

وهذا ينطبق أيضا على حساب الخصم على 5 سنوات:



وبذلك فإن: $C_0 = C_n v^5 = C_n v^2 v v^2$

كذلك سوف يتم عرض تسلسل العمليات وخاصة عند حساب القيم الحالية للدخل عند دراستنا لهذه الفقرة في الفصل القادم.

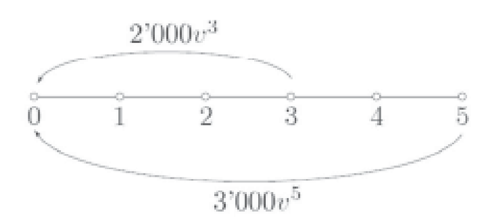
مثال: ما هو المبلغ الذي يجب إيداعه الآن في حساب ادخار يوفر 3%، إذا كنا نرغب في سحب كامل المبلغ المودع في الحساب على مرحلتين:المرحلة الأولى نسحب فيها بعد 3 سنوات مبلغ 3000 frs والمرحلة الثانية نسحب فيها مبلغ frs2000 بعد 5 سنوات؟ استخدم طرق مختلفة لإيجاد الحل.

الحل رقم (1):

كل مبلغ مسحوب هو مبلغ مخصوم فرديا على 3 ثم على 5 سنوات.

حيث:

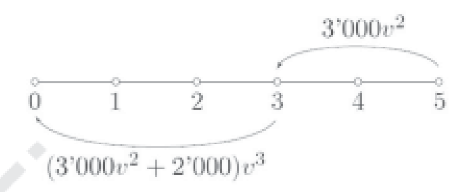
$$C_o = 2000v^3 + 3000v^5$$



$v = \frac{1}{1,03} = 0,9708738$ تصبح $C_0 = 4418,1$ C_0

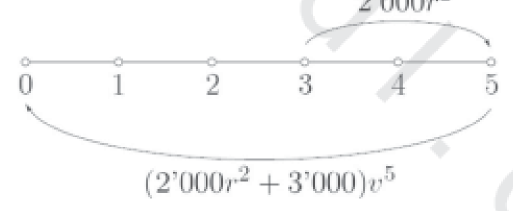
الحل رقم (2):

المبلغ الثاني المقدر بـ 3000 *frs* هو مبلغ مخصوم على سنتين ثم يتم خصم المبلغ الإجمالي على 3 سنوات: $C_0 = (3000v^2+2'000)v^3 = 4418{,}1$



الحل رقم (3):

طريقة الحل الثالث غير شائعة كثيرا لكنها توضح جيدا العمليات المتسلسلة؛ فالمبلغ الأول المقدر بـ 2000 frs يتم رسملته (الاستفادة من تحويله إلى رأس مال) على سنتين. ثم يتم خصم الإجمالي على 5 سنوات. وبذلك نحصل على: $C_0 = (3000r^2 + 2000)r^5 = 4418{,}1$



(3.4) النسبة المعادلة

تطبق النسب المعادلة في حساب فوائد النسب المركبة. النسبة المعادلة هي نسبة نحصل من خلالها على نفس الأرباح (الفوائد) التي ينتجها رأس مال مماثل استثمر خلال مدة مماثلة.

الرموز:

i_m نسبة الفائدة المسددة في الفترة m

الجدول الآتي يبين النسبة المعادلة حسب الفترة المحددة:

i_m	m	الفترة
i	1	سنوية
i_2	2	نصف سنوية
i_4	4	ربع سنوية
i_{12}	12	شهرية

التعريف أعلاه يؤدي إلى بيان العلاقة التالية:

$$\underbrace{C_0\,(1+i_m)^m}_{\text{فوائد مركبة مدفوعة } m \text{ مرات في السنة}} = \underbrace{C_0 i_m}_{\text{فوائد مركبة مدفوعة سنويا}}$$

وهذا يمكن من وضع العلاقة بين i وi_m :

$$i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \qquad (3.9)$$

$$i = (1+i_m)^m - 1 \qquad (3.10)$$

مثال رقم (1): أوجد النسبة الشهرية المعادلة للنسبة السنوية المقدرة بـ 12%؟

الحل

إذا $i = 0,12$ $\quad _{12} = (1+0,12)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,009488$ أي 0,949%

مثال رقم (2): أوجد النسبة ربع السنوية المعادلة للنسبة الشهرية المقدرة بـ 1%؟

الحل

$i_{12} = 0,01$ نبحث عن $_4$ ؟ نحول النسبة أولا إلى سنوية ثم نحولها إلى ربع سنوية.

ثم $i = (1+0,01)^{12} - 1 = 0,126825$

$i_4 = (1+0,126825)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,0303$ أو 3,03%

(3.5) النسبة الفعلية والاسمية

هذه النسب تظهر من حين لآخر في حساب القروض وخاصة القروض الصغيرة، وهي تعطي المؤسسة الممولة إمكانية إعلان نسب تبدو في ظاهرها صغيرة عما هي عليه فعليا.

لنفترض أن شروط الإقراض هي كالآتي: فوائد سنوية تقدر بـ 12% تدفع شهريا بنسبة 1%. والقارئ المنتبه يمكنه ملاحظة أن نسبة 12% السنوية لا تعادل النسبة الشهرية بـ 1% بل تعادل نسبة: $i = (1 + 0{,}01)^{12} = 12{,}682\%$ سنويا. ولكي يكون إعلان المؤسسة المالية دقيقا يجب أن يتضمن ما يلي: "نسبة فائدة سنوية بـ 12,682% سنويا يدفع شهريا بنسبة 1%".

هذا التوضيح ينطوي على مفهومين أساسيين:

النسبة الفعلية (12,682%) والنسبة الاسمية (12%) المدفوعة شهريا بمقدار 1%.

الرموز:

لنرمز إلى $i^{(m)}$ نسبة الفائدة الاسمية التي تدفع على أجزاء متساوية $\frac{i^{(m)}}{m}$ و i نسبة الفائدة السنوية الفعلية.

بالرجوع إلى القاعدة (3.9) نستطيع كتابة العلاقة: $i^{(m)} = mi_m$ وهذا ما يؤدي إلى تحرير العلاقة بين i و $i^{(m)}$:

$$i^{(m)} = m\left[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right] \tag{3.11}$$

و

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} - 1 \tag{3.12}$$

مثال: أوجد نسبة الفائدة السنوية الفعلية المماثلة لنسبة فائدة اسمية بـ 8% مدفوعة على أجزاء شهرية تقدر بـ2%.

الحل

$i^{(4)} = 0{,}08$ لذلك فإن: $i = \left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^4 - 1 = 8{,}243\%$



الآلة الحاسبة تي آي–83

تحتوي الآلة الحاسبة تي آي–83 من خلال القائمة: APPS ، Finance على دالتين نتمكن بفضلهما من حساب:

(أ) النسبة الفعلية حسب النسبة الاسمية:

C▸Eff ($i^{(m)}$ في صورة نسبة مئوية, m)

(ب) النسبة الاسمية حسب النسبة الفعلية

C▸Nom (i في صورة نسبة مئوية, m)

مثال: أوجد النسبة السنوية الفعلية المماثلة لنسبة اسمية تقدر بـ 6% مدفوعة بتجزئة على فترات ربع سنوية تساوي 1,5%.

الحل

Eff (6,4%) = 6,136%

(3.6) نسبة فائدة حينية وتحويل رأس مال مستمر

(3.6.1) نسبة فائدة حينية

باسترجاع القاعدة:

$$i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$$

يمكن أن نتساءل عن التغييرات التي ستطرأ على نسبة الفائدة الفعلية إذا كانت الفائدة لا تسدد شهريا ولا يوميا بل تسدد بشكل مستمر (متواصل).

كنتيجة تحليلية لهذه العملية نحصل على:

$$lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{m}\right)^{m}=e^{x}$$

وبتطبيق هذه المعادلة هنا نحصل على:

$$lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=e^{i^{(m)}}$$

نرمز لـ $\delta = i^{(m)}$ ونعرف النسبة الفعلية حسب النسبة الحينية كما يلي:

$$i=e^{\delta}-1 \quad (3.13)$$

مثال: أوجد النسبة السنوية الفعلية المماثلة للنسبة الحينية المقدرة بـ 8%؟

الحل

$$\delta=e^{0,08}-1=8,329\%$$

3.6.2) تحويل رأس مال مستمر

في حالة تحويل رأس مال مستمر، نكتب دالة تحويل رأس المال على النحو التالي:

$$C_n=C_0e^{\delta n} \quad (3.14)$$

مثال: بنسبة فائدة مستمرة تقدر بـ 10% سنويا أوجد عدد السنوات اللازمة لرأس مال يبلغ 6000 € لكي يصل إلى 15000 €؟

الحل

$C_0=6'000, C_n=15'000, \delta=0,1$ البحث عن n؟

من خلال: $C_n = C_0 e^{\delta n}$ نستنتج:

$$n = \frac{ln\,(C_n/C_0)}{\delta} = \frac{ln\,(2,5)}{0,1} = 9,1629 \text{ سنوات}$$

(3.7) النسبة المتوسطة لعدد من الاستثمارات

إذا تم استثمار مجموعة من المبالغ خلال فترات مختلفة وبنسب فائدة مختلفة كذلك فإنه بالإمكان إيجاد نسبة الفائدة المتوسطة لهذه الاستثمارات.

الرموز:

C_t رأس المال (الاستثمار) رقم t.

i_t نسبة الفائدة رقم t.

r_t عامل تحويل رأس المال رقم t.

n_t مدة الاستثمار رقم t.

k عدد الاستثمارات.

T النسبة المتوسطة لإجمالي الاستثمارات.

يتم البحث عن القيمة النهائية التي أفرزتها مجموعة الاستثمارات التي أدخلت في بداية العملية. وهذه الحالة تبدو أكثر تعقيدا من البحث عن النسبة المتوسطة لمجموعة استثمارات بنسب فائدة بسيطة (انظر الفقرة (2.3)). حيث ليس بالإمكان وضع قاعدة نحصل من خلالها على النسبة المتوسطة. لذلك فاستخدام الحلال هو إجباري في هذه الحالة.

علاقة التوازن تحرر على النحو التالي:

$$C_1 r_1^{n_1} + C_2 r_2^{n_2} + \cdots + C_k r_k^{n_k} = C_1\,(1+T)^{n_1} + C_2\,(1+T)^{n_2} + \cdots + C_k\,(1+T)^{n_k}$$

مثال: أوجد نسبة الفائدة المتوسطة للاستثمارات التالية:

الاستثمار	المدة	نسبة الفائدة
€ 1000	سنة	%3
€ 2000	سنتين	%4
€ 3000	3 سنوات	%5

الحل

باستخدام برنامج إكسل أو الآلة الحاسبة تي آي −83 (انظر الفقرة 17.4.3). والمطلوب هنا هو حل المعادلة التالية بعد تعويض T+1 بـx :

$$1'000x + 2'000x^2 + 3'000x^3 - 1'000 \times 1{,}03 - 2'000 \times 1{,}04^2 - 3'000 \times 1{,}05^3 = 0$$

من خلال برنامج إكسل أو الآلة الحاسبة تي آي−83 نجد:= x = 1,0459 أو T = 4,59%.

(3.8) تمارين

1− احسب رأس المال النهائي (بما في ذلك أرباح الفوائد) لرأس مال أصلي يساوي frs13000 استثمر بنسبة 4,2% لمدة 8 سنوات وأشهر و3 أيام.

2− أوجد القيمة الحالية لقيمة مستقبلية تقدر بـ100000 € تصرف بعد 6 سنوات ونصف. احسب ذلك مستخدما الفرضيات التالية ومقارنا بينها:

(أ) نسبة الفائدة السنوية تساوي 3,5%.

(ب) نسبة الفائدة نصف السنوية التي تتناسب مع نسبة الفائدة السنوية 3,5%.

(ج) نسبة الفائدة نصف السنوية التي تعادل نسبة الفائدة السنوية 3,5%.

3− كم عدد السنوات اللازمة لتحويل رأس مال يبلغ 3000 € إلى 5000 € علما بأن نسبة الفائدة تبلغ 3%؟

4- استثمر مبلغ 2500 € لمد 13 سنة إلى حين بلغ 3234 €. أوجد نسبة الفائدة السنوية المناسبة لهذه العملية.

5- استثمر رأس مال أصلي يقدر بـ2000 € بنسبة 12% مجزأة بنسبة 3% لكل ربع سنة. أوجد رأس المال المتحصل عليه بعد سنة.

6- ★إثر وفاة أحد الفلاسفة الكبار ترك في حساب بنكي يوفر نسبة فائدة سنوية 4% رأس مال يقدر بـ1 *frs* . وفي عيد ميلادها بتاريخ 11 مايو 2002 اكتشفت "سيليا" عبر بنك "بكسو" أنها صاحبة الحظ السعيد بعد إعلامها أنها المستفيدة بدفتر ادخار تبلغ قيمته مليون *frs* . المطلوب تحديد تاريخ إيداع المبلغ الأصلي؟ (أساس 30/ 360)

7- استثمر رأس مال في حساب يوفر فائدة نسبتها 4% لمدة 3 أشهر (فائدة بسيطة). المبلغ المتحصل عليه استثمر مرة ثانية في حساب يوفر 1% لمدة 5 سنوات (فائدة مركبة). أوجد القيمة النهائية بدلالة القيمة الحالية (رأس المال الأصلي) المستثمرة.

8- نودع في البنك مبلغ 5000 *frs* في حساب توفير يستخدم الفائدة المركبة. بعد سنة سحبنا المبلغ الذي تم إيداعه وتركنا الباقي لمدة سنة فحصلنا في آخر السنة على مبلغ 208 *frs* . أوجد نسبة الفائدة المستخدمة في هذه العملية.

9- مقداري رأس مال مجموعهما 5000 € استثمرا على النحو التالي:

(أ) الأول بنسبة فائدة بسيطة سنوية تساوي 10%.

(ب) الثاني بنسبة فائدة مركبة سنوية تساوي 8%.

بعد 9 سنوات حصلنا على نفس الأرباح للمبلغين. أوجد مقدار كل رأس مال.

10- أوجد نسبة الفائدة النصف سنوية المعادلة لنسبة فائدة شهرية بـ1%.

11- ما هي نسبة الفائدة الشهرية المعادلة لنسبة فائدة سنوية بـ9%؟

12- حدد ثمن البضاعة المرفع بنسبة 50% بـ379,50 €. أوجد الثمن قبل الترفيع.

13- بنسبة فائدة سنوية بـ 5% أجريت عملية خصم على مبلغ 40000 € في مدة 5 سنوات و3 أشهر. احسب مقدار الخصم:

(أ) مباشرة.

(ب) إذا افترضنا أن عملية تحويل رأس مال لمدة 3 سنوات و9 أشهر تسبق عملية خصم على الناتج لمدة 9 سنوات.

14- أجريت عملية خصم على مبلغ 1000 *frs* على 3 سنوات: السنة الأولى بنسبة خصم تقدر بـ1% والسنة الثانية بنسبة خصم تقدر بـ0% والسنة الثالثة بنسبة خصم تقدر بـ9%. أوجد نسبة الفائدة السنوية المتوسطة الموظفة على هذه العملية.

15- مبلغين مقدارهما 1000 € و2000 € تم استثمارهما في حسابين مختلفين، الأول يوفر نسبة فائدة 3% والثاني نسبة فائدة 5%. استخدم قاعدة رياضية جبرية لإيجاد نسبة المردود المتوسط لهذين الاستثمارين.

16- نرغب في تسديد 4 مبالغ مستحقة في المستقبل بمبلغ وحيد نستطيع تسديده خلال 5 سنوات. أوجد المبلغ الوحيد إذا علمت أن نسبة الخصم على المبالغ الأربعة تساوي 10% وأن الآجال الممنوحة على المبالغ كانت على النحو التالي:

المبلغ	الآجال
frs 2000	سنة
frs 3000	3 سنوات
frs 1000	4 سنوات
frs 4000	7 سنوات

17- محتوى إحدى الإعلانات يقول: "نعطيكم 13% فوائد: إذا أودعتم لدينا مبلغ 100 *frs* نرجع لكم 204 *frs* بعد 8 سنوات". هل تستطيع تفسير هذا الإعلان؟

18- باستخدام برنامج إكسل أوجد النسبة المتوسطة لمجموعة الاستثمارات التالية:

المبلغ	المدة	نسبة الفائدة
8000 *frs*	سنتين ونصف	%3
6000 *frs*	3 سنوات	%3,5
4000 *frs*	3 سنوات	%4

19- شروط أحد القروض كانت على النحو التالي:المبلغ المقرض 52000 € بنسبة فائدة 10% سنويا.الفائدة تدفع كل 3 أشهر بمقدار 1300 €. ما هي نسبة الفائدة الفعلية التي يستخدمها البنك؟

20- ■ نرغب في إسناد جائزة قيمتها تساوي P وسوف تمنح الجائزة أول مرة بعد خمس سنوات من الآن ثم تمنح نفس القيمة بعد 10 سنوات. لدينا الآن مبلغ 20000 € نستطيع إيداعه في حساب يوفر لنا 2.5% سنويا. أوجد قيمة P.

21- مبلغ من المال قدره X وضع في حساب فوائده مركبة.بعد سنتين قدر المبلغ الإجمالي المتحصل عليه بـ 242000 *frs* وبعد 5 سنوات قدر بـ 322102 *frs*.

(أ) أوجد القيمة الجبرية لمقدار رأس المال النهائي ومقدار رأس المال الأصلي بعد الأربع سنوات الأولى.

(ب) أوجد باستخدام الحل الجبري مقدار رأس المال النهائي بعد 6 سنوات.

(جـ) أوجد باستخدام طريقة الاستيفاء الخطي مقدار رأس المال النهائي بعد الأربع سنوات الأولى.

22- تم إيداع مبلغ 35000 € في حساب ادخار بنسبة فائدة مركبة مستمرة تقدر بـ 105 سنويا.

(أ) متى يبلغ حساب الادخار مقدار 100000 € ؟

(ب) كم مدة تستلزم ليصل المبلغ إلى الضعف؟

23- في سنة 1980 بلغ عدد سكان إحدى الدول 200 مليون ساكن. وقد سجلت هذه الدولة معدل نمو سكاني مستمر بلغ 0,7% سنويا. قدر عدد السكان في سنة 2010 إذا افترضنا أن نسبة النمو بقيت ثابتة.

الفصل الرابع

الدفعات الدورية (الأقساط)

Les Rentes

في الفصل السابق درسنا القيمة الحالية أو النهائية لرأس مال وحيد. الفصل الحالي يعتبر أكثر شمولية من الفصل السابق حيث يهتم بالقيم الحالية والمستقبلية لمجموعة من رؤوس الأموال المدفوعة.

ملاحظة: هذا الفصل يجب أن يقرأ بالتوازي مع الفصل التاسع المخصص لتأمين الأقساط. ولدراسة هذا الفصل يحتاج القارئ إلى التعرف على رمز الجمع Σ الذي تم شرحه في الفصل 17.

(4.1) تعريفات

القسط أو السنوية هي سلسلة من الدفوعات الدورية بفترات ثابتة ومدة محددة ومعروفة مسبقا. لإيجاد القيمة الحالية للقسط نستخدم القاعدة $C_0 = v^n C_n$ لكل قسط مسدد.

في المقابل إذا أردنا حساب القيمة المستقبلية للقسط نستعمل القاعدة $_n = C_0 \quad ^n$ لكل قسط مسدد.

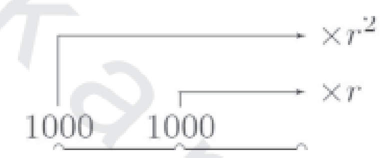
مثال: نقوم بإيداع المبالغ التالية في حساب ادخار يوفر 5%:

المبلغ	تاريخ الإيداع
1000frs	اليوم
1000frs	بعد سنة

ما هو المبلغ الذي نحصل عليه بعد سنتين؟

الحل

المطلوب حساب القيمة النهائية (المستقبلية) لقسط قدره 1000 frs يدفع لمدة سنتين باستخدام القاعدة (3.1):



وهكذا فإن القيمة النهائية لهذا القسط تبلغ بعد سنتين:

$$1'000r^2 + 1'000r = 2'152{,}50\ frs$$

تمكّن دراسة هذا الفصل من تسهيل هذا النوع من العمليات وخاصة إذا كان عدد الأقساط كبيرا.

نتحدث عن قسط بمقادير ثابتة إذا كانت جميع الأقساط متساوية كما هو مبين في المثال السابق. في المقابل نتحدث عن قسط بمقادير متغيرة.

إذا كان القسط يدفع في نهاية الفترة فهو يسمى "ما بعد العد" postnumerando أما إذا دفع القسط في بداية الفترة فهو يسمى "ما قبل العد" preanumerando وهي الحالة في المثال الأخير.

في الرياضيات المالية ندرس الأقساط التي تسدد دائما (أقساط مؤكدة) والتي تكون مدتها محددة مسبقا (أقساط مؤقتة). نتحدث - إذن - عن أقساط مؤكدة ومؤقتة. في الرياضيات الأكتوارية تدفع الأقساط فقط في صورة بقاء المؤمن

له على قيد الحياة. نتحدث – إذن – عن أقساط عمرية (مرتبطة بالعمر). وهذه الأخيرة سوف نتناولها بتفصيل أكثر في الفقرات القادمة.

الرموز:

$a_{\overline{n}|}$: القيمة الحالية لقسط مقداره 1 € يدفع في نهاية الفترة (مؤخرة) لعدد من الفترات يساوي n.

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$: القيمة الحالية لقسط مقداره 1 € يدفع في بداية الفترة (مسبقة) لعدد من الفترات يساوي n.

$s_{\overline{n}|}$: القيمة المستقبلية (النهائية) لقسط مقداره 1 € يدفع في نهاية الفترة (مؤخرة) لعدد من الفترات يساوي n.

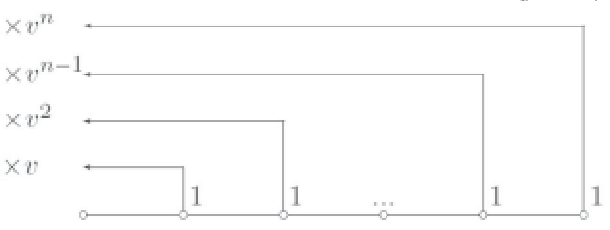
$\ddot{s}_{\overline{n}|}$: القيمة المستقبلية (النهائية) لقسط مقداره 1 € يدفع في بداية الفترة (مؤخرة) لعدد من الفترات يساوي n.

القواعد المبينة أدناه يمكن استنتاجها بسهولة بمساعدة القواعد عن المتواليات الهندسية التي تم عرضها في الفصل السادس عشر من هذا الكتاب.

(4.2) أقساط مؤخرة

(4.2.1) القيمة الحالية

الرسم البياني



القاعدة

$$a_{\overline{n|}} = v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n \quad (4.1)$$

القاعدة المختصرة

$$a_{\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^2 \quad (4.2)$$

القاعدة المبسطة

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{i} \quad (4.3)$$

مثال: احسب القيمة الحالية لقسط مؤخر يبلغ $frs3500$ مدفوع طيلة عشر سنوات ومحسوب بنسبة فائدة سنوية 6%؟

الحل

نستخدم القاعدة المبسطة التي تمكن من إيجاد الحل مباشرة. نحسب أولا:

$$i = 0{,}06 \; v = \frac{1}{1{,}06} \quad a_{\overline{10|}} = \frac{1-v^{10}}{i} = \frac{1-0{,}9433962^{10}}{0{,}06} = 7{,}360087$$

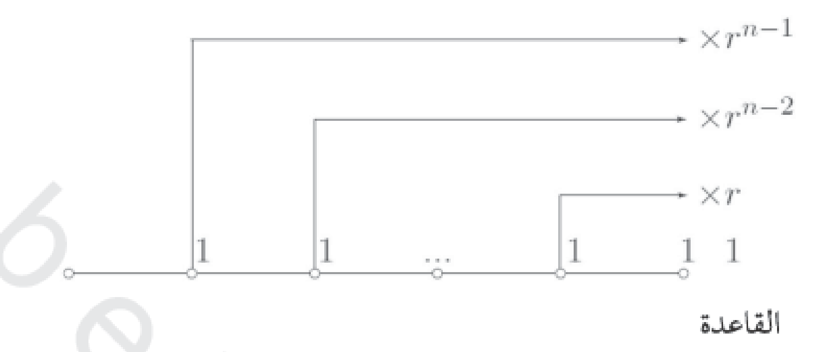
هذا المقدار يمثل القيمة الحالية لـ frs 1 مدفوع طيلة عشر سنوات، والدفعة الأولى تكون في نهاية السنة. بالنسبة لقسط يبلغ frs 3500 نضرب هذا الرقم بـ7,360087 وهو ما يعطينا:

القيمة الحالية $= 3'500a_{\overline{10|}} = 3'500 \times 7{,}360087 = 25'670{,}30\, frs$

هذه القيمة تناسب المبلغ الذي يجب إيداعه في دفتر ادخار بعائد نسبته 6% لكي يكون بالإمكان سحب مبلغ قدره frs 3500 طيلة عشر سنوات إلى حين استنفاذ كافة المبلغ الموجود في دفتر الادخار.

(4.2.2) القيمة النهائية (المستقبلية)

الرسم البياني



القاعدة

$$s_{\overline{n|}} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} \tag{4.4}$$

القاعدة المختصرة

$$s_{\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} r^t \tag{4.5}$$

القاعدة المبسطة

$$s_{\overline{n|}} = \frac{r^n - 1}{i} \tag{4.6}$$

مثال: أوجد القيمة المستقبلية لقسط مؤخر يبلغ 3500 *frs* مدفوع طيلة عشر سنوات ومحسوب بنسبة فائدة سنوية تقدر بـ 6%

الحل

نستخدم القاعدة المبسطة التي تعطي الحل مباشرة. نسحب أولا:

$$i = 0{,}06 \; r = 1 + i = 1{,}06 \; s_{\overline{10|}} = \frac{r^{n-1}}{i} = \frac{1{,}06^{10}}{0{,}06} = 13{,}180795$$

هذا المبلغ يمثل القيمة المستقبلية لمقدار $frs1$ يدفع طيلة عشر سنوات. الدفعة الأولى تتم في نهاية السنة. بالنسبة لقسط يبلغ 3500 frs نضرب هذا الرقم بـ13,180795 وهو ما يعطينا:

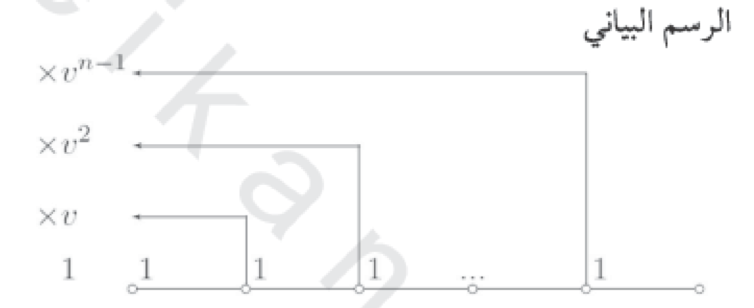
القيمة المستقبلية= $3'500s_{\overline{10|}} = 3'500 \times 13,18079546'132,80\ frs$

هذه القيمة تمثل- إذن - مقدار رأس المال الذي نحصل عليه بعد مرور عشر سنوات.

(4.3) القسط المسبق

(4.3.1) القيمة الحالية

الرسم البياني



القاعدة

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-2} + v^{n-1} \quad (4.7)$$

القاعدة المختصرة

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \quad (4.8)$$

القاعدة المبسطة

$$s_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^n}{d} \quad (4.9)$$

حيث:

$$d = \frac{i}{1 + i} = iv \quad (4.10)$$

مثال: أوجد القيمة الحالية لقسط مدفوع مسبقا يبلغ 3500 *frs* طيلة عشر سنوات ومحسوب بنسبة فائدة سنوية تقدر بـ6%.

الحل

$i = 0{,}06$ $v = \frac{1}{1{,}06}$ $d = \frac{0{,}06}{1{,}06} = 0{,}0566037$ ثم نحسب

$$3'500\ddot{a}_{\overline{n}|} = 3'500\frac{1-0{,}9433962^{10}}{0{,}0566037} = 27'305{,}92\ frs$$

ملاحظة: الرمز الجديد الذي تم إدراجه يمثل نسبة الخصم على سنة لنسبة الفائدة i

(4.3.2) القيمة المستقبلية

الرسم البياني

القاعدة

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n \tag{4.11}$$

القاعدة المختصرة

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} r^t \tag{4.12}$$

القاعدة المبسطة

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{r^n - 1}{d} \tag{4.13}$$

حيث: $d = \frac{i}{1+i}$

مثال: أوجد القيمة المستقبلية لقسط مدفوع مسبقا يبلغ frs 3500 طيلة عشر سنوات ومحسوب بنسبة فائدة سنوية تقدر بـ6%.

الحل

$i = 0{,}06 \; r = 1{,}06 \; d = \frac{i}{1+i} = 0{,}0566037$ ثم نحسب

$$3'500\ddot{s}_{\overline{n|}} = 3'500\frac{1{,}06^{10}}{0{,}0566037} = 48'900{,}80 \; frs$$

نحسب هذه القيمة المستقبلية لمعرفة القيمة المستقبلية لدفتر ادخار يتم تمويله بشكل دوري بمبالغ ثابتة علما بأن المبلغ الأول قد تم إيداعه مباشرة بعد فتح الدفتر.

إكسل

يمكن استخدام برنامج إكسل لحساب القيم الحالية والمستقبلية بكل سهولة وذلك من خلال الدوال المالية التالية التي توجد في البرنامج:

$$a_{\overline{n|}} = PV(i; n; -1; 0; 0) \;\Leftrightarrow\; a_{\overline{n|}}$$

$$s_{\overline{n|}} = FV(i; n; -1; 0; 0) \;\Leftrightarrow\; s_{\overline{n|}}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = PV(i; n; -1; 0; 1) \;\Leftrightarrow\; \ddot{a}_{\overline{n|}}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = FV(i; n; -1; 0; 1) \;\Leftrightarrow\; \ddot{s}_{\overline{n|}}$$

مثال: أودع مستثمر مبلغ 5000 € في حساب ينمو بنسبة 2,5%. كم كان المبلغ بعد نهاية السنة الرابعة؟

الحل

نبحث هنا عن القيمة المستقبلية لقسط يبلغ 5000 € يدفع مسبقا:

$$5'000\ddot{s}_{\overline{n|}} = 5'000 \times FV(0{,}025; 4; -1; 01) = 21'281{,}64 \,€$$



الآلة الحاسبة TI-83

نستخدم برنامج الحل المالي الموجود بداخل الآلة تي-83. لذلك نقوم بالضغط فوق [APPS] ، [1:Finance] ثم [TVM Solver] . بعد ذلك يتم إدخال المعطيات حسب متطلبات المسألة:

$\ddot{s}_{\overline{n}\rceil}$	$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$a_{\overline{n}\rceil}$
$N = n$ $1\% = i \times 100$ PV = 0 PMT = −1 ·FV =? P/Y = 1 C/Y = 1 PMT: BEGIN	$N = n$ $1\% = i \times 100$ ·PV =? PMT = 1 FV = 0 P/Y = 1 C/Y = 1 PMT: BEGIN	$N = n$ $1\% = i \times 100$ PV = 0 PMT = −1 ·FV =? P/Y = 1 C/Y = 1 PMT: END	$N = n$ $1\% = i \times 100$ ·PV =? PMT = 1 FV = 0 P/Y = 1 C/Y = 1 PMT: END

مثال: أودع مستثمر مبلغ 5000 € في حساب ينمو بنسبة 2,5%. كم كان المبلغ بعد نهاية السنة الرابعة؟

الحل

نبحث هنا عن القيمة المستقبلية لقسط قدره 5000 € يدفع مسبقا: $5'000\ \ddot{s}_{\overline{n}\rceil}$. ندخل القيم المبينة أدناه في صورة معامل ثم نضع المؤشر على مستوى ·FV حيث نقوم بإدخال قيمة عشوائية (مثال 5 = ·FV) ثم نضغط على [ALPHA] ، [SOLVE] وهو ما يعطينا القيمة التالية: ·FV = 4,256328516

بمعنى: $5'000 \times 4,256328516 = 21'281,64$ €

N = 4
%=2,5 *I*
PV=0
PMT=5000
·FV = 5
P/Y = 1
C/Y = 1
PMT: BEGIN

(4.4) العلاقة بين المتغيرات

(4.4.1) العلاقات بين المسبق/المؤخر المستقبيلة/الحالية

يمكن بسهولة أن نثبت رياضيا مضمون العلاقات التالية:

العلاقة بين $a_{\overline{n|}}$ و $\ddot{a}_{\overline{n|}}$

$$a_{\overline{n|}} = v\ddot{a}_{\overline{n|}} \tag{4.14}$$

العلاقة بين $s_{\overline{n|}}$ و $\ddot{s}_{\overline{n|}}$

$$s_{\overline{n|}} = v\ddot{s}_{\overline{n|}} \tag{4.15}$$

العلاقة بين $a_{\overline{n|}}$ و $s_{\overline{n|}}$

$$a_{\overline{n|}} = v^n s_{\overline{n|}} \tag{4.16}$$

العلاقة بين $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ و $\ddot{s}_{\overline{n|}}$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^n \ddot{s}_{\overline{n|}} \tag{4.17}$$

مثال: نعلم القيمة الحالية لقسط مدفوع مسبقا:33, 21088 €. لو تم حسابها مؤخرا لكانت 33, 20088 €. أوجد نسبة الفائدة السنوية المستخدمة؟

الحل

باستخدام القاعدة (4.14) نجد:

$$v = \frac{20'277{,}24}{21'088{,}33} = 0{,}961538462$$

وبالتالي فإن: $i = \frac{1}{0{,}961538462} - 1 = 0{,}04$

(4.4.2) العمليات المتسلسلة

نسطيع التعبير عن أي قيمة حالية أو مستقبلية كمجموع عدد من القيم الحالية:

$$a_{\overline{n+k|}} = a_{\overline{n|}} + v^n a_{\overline{k|}} \quad (4.18)$$

$$\ddot{a}_{\overline{n+k|}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} + v^n \ddot{a}_{\overline{k|}} \quad (4.19)$$

$$s_{\overline{n+k|}} = r^n a_{\overline{n|}} + a_{\overline{k|}} \quad (4.20)$$

$$\ddot{s}_{\overline{n+k|}} = r^n \ddot{s}_{\overline{n|}} + \ddot{s}_{\overline{k|}} \quad (4.21)$$

(4.4.3) العلاقات بين المعامل n و i

الإشكالية تتمثل في الآتي:

من خلال القاعدة $a_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{i}$ نبحث عن n بمعرفة $a_{\overline{n|}}$ و i أو نبحث عن i بمعرفة $a_{\overline{n|}}$ و n.

البحث عن قيمة i

هذه العملية هي صعبة للغاية لأنه لا يمكن كتابة i بدلالة بقية المعاملات. نستطيع - إذن - استخدام طريقة لتكرار العمليات (طريقة التصنيف أو طريقة النقطة الثابتة المعروضتين في الفصل السابع عشر) أو استخدام الدوال المضمنة لبرنامج إكسل أو للآلة الحاسبة تي-83.

إكسل

نعرض فيما يلي كيفية استخدام الدوال المالية في إكسل لإيجاد نسبة الفائدة في الحالات التالية:

$$i = RATE\left(n; -1; a_{\overline{n}|}; 0; 0\right) \;\Leftrightarrow\; a_{\overline{n}|}$$
$$i = RATE\left(n; -1; 0; s_{\overline{n}|}; 0\right) \;\Leftrightarrow\; s_{\overline{n}|}$$
$$i = RATE\left(n; -1; \ddot{a}_{\overline{n}|}; 0; 1\right) \;\Leftrightarrow\; \ddot{a}_{\overline{n}|}$$
$$i = RATE\left(n; -1; 0; \ddot{s}_{\overline{n}|}; 1\right) \;\Leftrightarrow\; \ddot{s}_{\overline{n}|}$$

مثال: لدينا اليوم مبلغ قدره 17572,22 € يمكننا من تسديد قسط سنوي يبلغ 2000 € طيلة عشر سنوات. ما هي نسبة الفائدة المستخدمة في هذه العملية؟

الحل

نستطيع كتابة العلاقة التالية:

$$2'000\ddot{a}_{\overline{10}|} = 17'572{,}22, \quad \text{أي} \quad \ddot{a}_{\overline{10}|} = \frac{17'572{,}22}{2'000} = 8{,}786109$$

باستخدام دالة الإكسل نجد: $RATE(10; -1; 8.786109; 0; 0) = 3\%$



الآلة الحاسبة TI-83

نستخدم الحل المالي للآلة تي-83. لذلك نضغط على APPS ، Finance 1: ثم TVM Solver

مثال: يقوم مستثمر بإيداع مبلغ 5000 € سنويا في حساب توفير. وقد بلغ رأس المال عند نهاية السنة الرابعة مقدارا قدره. ما هي نسبة الفائدة المستخدمة؟

الحل

نبحث عن i التي تحقق المعادلة التالية: $5'000\,\ddot{s}_{\overline{4}|} = 21'281{,}64$ أي: $\ddot{a}_{\overline{4}|} = \frac{21'281{,}64}{5'000} = 4{,}256328516$. ندخل القيم المبينة أدناه في صورة معامل ثم نضع المؤشر على مستوى 1%، حيث نقوم بإدخال قيمة عشوائية (مثال $1\% = 5$) ثم نضغط على ALPHA ، SOLVE وهذا ما يعطينا القيمة التالية: $1\% = 2.5\%$.

N=4
1% = 5
PV=0
PMT=-1
FV = 5
P/Y = 1
C/Y = 1
PMT: BEGIN

البحث عن قيمة n

سوف يقتصر موضوع الفقرة على القسط المؤخر (الذي يدفع في نهاية الفترة). بالنسبة للقيم الأخرى، يتم تطبيق القواعد بشكل مماثل.

عند البحث عن قيمة n بمعرفة $a_{\overline{n}|}$ و i يمكن أن نحصل على عدد غير صحيح. نبدأ بعزل n داخل القاعدة $a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}$ وهو ما يعطي:

$$n = \frac{\ln(1 - i a_{\overline{n}|})}{\ln v} \qquad (4.22)$$

نسمي N العدد الصحيح الأصغر والأقرب من n و F الجزء العشري من n. من خلال المعادلة (4.18)، يمكن أن نكتب: $a_{\overline{n}|} = a_{\overline{N+F}|} = a_{\overline{N}|} + v^N \ a_{\overline{F}|}$

وبذلك فإن عدد الدفوعات المساوية لـ1 يبلغ N، إضافة إلى جزء آخر من القسط يقدر بـ$a_{\overline{F}|}$ ويدفع في آخر قسط.

لنفترض أن عقدا ينص على وجوب دفع الجزء من القسط سنة بعد نهاية السنة N، المطلوب – إذن – هو تسديد تكملة القسط البالغة $a_{\overline{F}|}$. وبالتالي فإن قاعدة تساوي القيم الحالية تكون قد تحققت: $a_{\overline{n}|} = a_{\overline{N+F}|} = a_{\overline{N}|} + v^{N+1} \ r a_{\overline{F}|}$

مثال: قرض يبلغ 1000 frs يتم تسديده على أقساط سنوية لفترة زمنية قدرها n. أوجد هذه الفترة الزمنية علما بأن نسبة الفائدة تبلغ 10%؟

الحل

نستطيع كتابة العلاقة التالية:

$400a_{\overline{n|}} = 1'000$ حيث $a_{\overline{n|}} = \frac{1'000}{400} = 2,5$ يمكننا أن نحسب n على النحو التالي: $n = \frac{\ln(1-ia_{\overline{n|}})}{\ln v} = \frac{\ln(1-0,1\times 2,5)}{\ln v} = 3,018377187$

أي : N=3 و F=0,018377187 ثم نحسب القيمة $a_{\overline{F|}}$ بالاستعانة بالقاعدة (4.1)، وهو ما يعطينا: $a_{\overline{F|}} = 0,0175$. وبذلك يضاف إلى القسط الثالث البالغ 400 الجزء من القسط البالغ $400a_{\overline{F|}} = 400 \times 0,0175 = 7\ frs$ وذلك عند بلوغ أجل دفع هذا القسط.

يمكن أن ينص العقد كذلك على دفع الجزء من القسط بعد سنة. وفي هذه الحالة فإن القسط الأخير يساوي: $400ra_{\overline{F|}} = 400 \times 1,1 \times 0,0175 = 7,7\ frs$.

إكسل

تمكن الدوال المالية الموجودة في إكسل من حساب الفترة الزمنية من خلال القاعدة (4.22) ولكنها لا تمكن من حساب الجزء من القسط المدفوع مع آخر قسط:

$$a_{\overline{n|}} \Leftrightarrow n = NPER\left(i; -1; a_{\overline{n|}}; 0; 0\right)$$
$$s_{\overline{n|}} \Leftrightarrow n = NPER\left(i; -1; 0; s_{\overline{n|}}; 0\right)$$
$$\ddot{a}_{\overline{n|}} \Leftrightarrow n = NPER\left(i; -1; \ddot{a}_{\overline{n|}}; 0; 1\right)$$
$$\ddot{s}_{\overline{n|}} \Leftrightarrow n = NPER\left(i; -1; 0; \ddot{s}_{\overline{n|}}; 1\right)$$

مثال: نمتلك اليوم مبلغا قدره 17000 € يمكن من تسديد مقدار قسط بـ2000 € سنويا. كم الفترة الزمنية التي تسمح بمواصلة دفع هذا القسط علما بأن نسبة الفائدة هي 3%؟

الحل

يمكن كتابة العلاقة التالية:

$17'000 = 2'000\ \ddot{a}_{\overline{n}|}$ أي $8,5 = \frac{17'000}{2'000} = \ddot{a}_{\overline{10}|}$ باستخدام دالة الإكسل:

$NPE(0.03; -1; 8.5; 0; 0) = 9,958829123$ أي 9 أقساط بـ2000 € وجزء من

القسط يبلغ: $2'000\ \ddot{a}_{\overline{0,958829123}|} = 1'918,82$ €



الآلة الحاسبة TI-83

في الآلة تي–83 نستخدم الحل المالي بوضع المؤشر على القيمة المجهولة N .

مثال: نمتلك اليوم مبلغا قدره 17000 € يمكن من تسديد مقدار قسط بـ2000 € سنويا. كم الفترة الزمنية التي تسمح بمواصلة دفع هذا القسط علما بأن نسبة الفائدة هي 3%؟

الحل

حسب المثال السابق المطلوب هو حساب القيمة: $\ddot{a}_{\overline{10}|} = \frac{17'000}{2'000} = 8,5$

وهو ما يؤدي إلى إدخال القيم التالية ثم نضغط على ALPHA ، SOLVE كي نحصل على القيمة التالية: N = 9,958829123

N =1

1% = 3

PV=8.5

PMT=-1

FV = 0

P/Y = 1

C/Y = 1

PMT: BEGIN

(4.5) الأقساط المخصصة

(4.5.1) القسط الأبدي

هذا القسط الأبدي هو متوالية هندسية لا نهائية.

الرموز:

$a_{\overline{\infty|}}$: القيمة الحالية لقسط لا نهائي مؤخر (يدفع في نهاية الفترة)

$\ddot{a}_{\overline{\infty|}}$: القيمة الحالية لقسط لا نهائي مسبق (يدفع في بداية الفترة)

القاعدة المستخدمة لـ$a_{\overline{\infty|}}$

$$a_{\overline{\infty|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \tag{4.23}$$

القاعدة المبسطة (انظر الفصل السادس عشر)

$$a_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{i} \tag{4.24}$$

القاعدة المستخدمة لـ$\ddot{a}_{\overline{\infty|}}$

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = v + v^2 + v^3 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \tag{4.25}$$

القاعدة المبسطة

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{d} \tag{4.26}$$

مثال: نرغب في إحداث جائزة نوبل للرياضيات المالية. نمتلك رأس مال قدره 500000 €. ما هو مقدار الجائزة التي نستطيع منحها كل سنة دون توقف إذا أمكن لرأس المال أن ينمو بنسبة 2,5% سنويا؟

الحل

هذه الحالة هي لقسط أبدي حيث الفائدة فقط هي التي يتم صرفها (على الجائزة) في صورة قسط. والمبلغ الأصلي لن يتم استخدامه أبدا. وبالتالي من خلال القاعدة (4.24) ومعرفة كل من $_{\overline{\infty|}}$ و i نحصل على:

القسط السنوي = $ia_{\overline{\infty|}} = 0{,}025 \times 500'000 = 12'500€$ تدفع للمرة الأولى في نهاية السنة.

(4.5.2) القسط المؤجل

التعريف:

القسط المؤجل هو القسط الذي يبدأ نفاذه بعد فترة زمنية محددة تسمى الزمن المؤجل. قاعدة التحيين تنجز على مرحلتين: يتم تحيين القسط إثر تسديده ثم يتم تحيين إجمالي الفترة الزمنية المؤجلة.

الرموز:

${}_{k|}a_{\overline{n|}}$: القيمة الحالية لقسط مؤخر (يدفع في نهاية الفترة) ومؤجل بعدد k من السنوات.

${}_{k|}\ddot{a}_{\overline{n|}}$: القيمة الحالية لقسط مسبق (يدفع في بداية الفترة) ومؤجل بعدد k من السنوات.

نستلهم القواعد من التعريف ونكتبها على النحو التالي:

$$ {}_{k|}a_{\overline{n|}} = v^k a_{\overline{n|}} \quad (4.27) $$

$$ {}_{k|}\ddot{a}_{\overline{n|}} = v^k \ddot{a}_{\overline{n|}} \quad (4.28) $$

ملاحظة:

القسط السنوي المؤخر والمؤجل يبدأ فعليا نفاذه سنة بعد الزمن المؤجل. في المقابل فإن القسط السنوي المسبق والمؤجل يبدأ مع نهاية الزمن المؤجل. وهذا ما يمكن من كتابة المعادلة التالية:

$$_{k|}a_{\overline{n|}} = {}_{k+1|}\ddot{a}_{\overline{n|}} \qquad (4.29)$$

مثال: احسب القيمة الحالية لقسط قيمته 4000 frs سنويا لمدة 5 سنوات ومؤجل بفترة زمنية قدرها 3 سنوات ونصف. هذا القسط سيتم تسديده عند نهاية الفترة الزمنية المؤجلة مباشرة. نسبة الفائدة المستخدمة :3%

الحل

بما أن : $n = 5$ $k = 3,5$ $i = 0,03$ و $d = 0,029126213$

فإن: $\ddot{a}_{\overline{n|}} = \frac{1-v^n}{d} = \frac{1-0,97087378^5}{0,029126213} = 4,717098403$

وبذلك نحصل على: $4'000\,_{3,5|}\ddot{a}_{\overline{5|}} = 4'000v^{3,5}\ddot{a}_{\overline{5|}} = 17'013,90\,frs$

(4.5.3) القسط المجزأ على فترات

يحدث في الواقع أن يتم دفع الأقساط التي حان أجلها بصورة مجزأة على عدد من الدفوعات. مثال: يمكن لقسط سنوي يبلغ 12000 frs أن يتم تجزئته إلى أقساط جزئية تدفع شهريا بحساب 1000 frs للشهر الواحد. في هذه الحالة نتحدث عن أقساط بقيم مجزأة.

تعريف:

نعرف الرمز $\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)}$ بأنه القيمة الحالية لقسط مسبق قدره 1 € يدفع جزئيا بنسبة $\frac{1}{m}$. القسط الأول الذي يبلغ $\frac{1}{m}$ يدفع بعد فترة زمنية قدرها $\frac{1}{m}$.

وبذلك فإن $12'000\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(12)}$ تمثل القيمة الحالية لقسط سنوي يبلغ 12'000 frs، مدفوع شهريا بمقدار 1000 frs، المرة الأولى يدفع في نهاية الشهر.

طريقة الحساب:

الطريقة الأسهل هي استخدام مقياس زمني آخر ويتم ذلك من خلال كتابة نسبة الفائدة السنوية i بدلالة m.

وهذا ما يؤدي إلى تحويل القواعد المبسطة لـ $a_{\overline{n|}}, \ddot{a}_{\overline{n|}}, s_{\overline{n|}}, \ddot{s}_{\overline{n|}}$ باستخدام الفترة الزمنية المحولة إلى m أي nm.

إذا كانت X تمثل القسط السنوي فإن قاعدة التحويل تكتب كالآتي:

$$X a_{\overline{n|}}^{(m)} = \frac{X}{m} a_{\overline{nm|}} i_m \tag{4.30}$$

وحيث إن فهم القواعد الأكتوارية للأقساط (الفصل التاسع) يتطلب كتابة القواعد المتضمنة للقيم الحالية المؤخرة والمسبقة وبصورتها العادية والمختصرة نورد هذه القواعد في الآتي:

القسط المؤخر (يدفع في نهاية الفترة):

$$a_{\overline{n|}}^{(m)} = \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} v^{\frac{2}{m}} + \cdots + \frac{1}{m} v^{\frac{nm}{m}} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{nm} v^{\frac{t}{m}} \tag{4.31}$$

القسط المسبق (يدفع في بداية الفترة):

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} + \cdots + \frac{1}{m} v^{\frac{nm-1}{m}} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{nm-1} v^{\frac{t}{m}} \tag{4.32}$$

مثال: أوجد القيمة الحالية لقسط سنوي يبلغ 12000 € يدفع على خمس سنوات بأقساط مجزأة شهريا بحساب 1000 € القسط الواحد. نسبة الفائدة السنوية المستخدمة تساوي 10%؟

الحل

نبدأ بحساب النسبة المعادلة i_{12} :

$$i_{12} = (1 + 0{,}1)^{\frac{1}{12}} = 0{,}00797414$$

نكتب بعد ذلك الفترة بالأشهر: شهر $nm = 5 \times 12 = 60$

يبقى أن نحسب: $1000a_{\overline{60}|}$ حيث $v = \frac{1}{1+i_{12}} = 0,9920889435$ وبذلك نحصل على: $1000a_{\overline{60}|} = 47'538,50$ €

(4.5.4) **القسط "أي كان"**

هذه الفقرة تعتبر أكثر شمولية من الفقرات السابقة في دراسة الأقساط، حيث سيتم حساب القيمة الحالية لأقساط مختلفة في المقادير ونسب فوائدها مختلفة كذلك من فترة زمنية إلى أخرى.

الرموز:

i_t : نسبة الفائدة في الزمن t.

v_t : نسبة الخصم في الزمن t.

R_t : المبلغ المدفوع في الزمن t.

n : فترات الدفوعات بالسنوات.

نحصل على القيمة الحالية لقسط من خلال القاعدة التالية:

$$\text{القيمة الحالية} = \sum_{t=0}^{n-1} v_t^t R_t \qquad (4.33)$$

مثال: نقوم بإيداع المبالغ التالية: 300€ حالا، 2000€ بعد سنة و1000€ بعد سنتين. احسب القيمة الحالية لهذه المبالغ المودعة. نسبة الفائدة في السنة الأولى 3%، في السنة الثانية 2% وفي السنة الثالثة 1,5%.

الحل

يمكن تصميم الجدول التالي لتوضيح الحالة:

الزمن t	R_t	i_t	v_t^t	$v_t^t R_t$
0	300	0,03	1	300
1	2000	0,02	0,98039216	1960,78
2	1000	0,015	0,97066175	970,66

وبذلك تكون القيمة الحالية كالتالي: $\sum_{t=0}^{2} \ {}_{t}^{t}R_t = 3'231,44€$

(4.6) التمارين

1- احسب القيم التالية باستخدام نسبة فائدة 10%:

(أ) $800\ddot{a}_{\overline{10|}}$ (ب) $400a_{\overline{10|}}$ (جـ) $100\, s_{\overline{3|}}$

(د) $50\ddot{s}_{\overline{3|}}$ (هـ) $800a_{\overline{10|}}^{(12)}$ (و) $600s_{\overline{5|}}^{(4)}$

(ز) $50a_{\overline{\infty|}}$ (ح) $100_{8|}\ddot{a}_{\overline{9|}}$ (ط) $100\,{}_{8|}s_{\overline{9|}}^{(12)}$

2- ■ احسب $\sum_{t=1}^{50} s_{\overline{2t|}}$

3- اختزل العبارة التالية:

$$\frac{a_{\overline{40|}}}{a_{\overline{20|}}(2-ia_{\overline{20|}})}$$

4- ما هي القيمة الحالية لقسط مؤخر يقدر بـ10000 € يدفع كل سنتين طيلة عشر سنوات بنسبة فائدة 3%؟

5- اقترض شخص مبلغ 50000 *frs* من أحد المؤسسات البنكية. وقد تم الاتفاق بأن يسدد نفس المبلغ طيلة عشر سنوات. كم يقدر المبلغ المقرض إذا كان البنك يستخدم نسبة فائدة 10%؟

6- يقول المسؤول في البنك لسيليا: 'بإمكانك سحب مبلغ 4870,75 € سنويا طيلة 15 سنة لكي تستنفذي رصيدك في الحساب'. ما هو المبلغ الذي تمتلكه سيليا في حسابها إذا كان الحساب ينمو بنسبة 3%؟

7- يرغب أحد المدخرين في جمع مبلغ من المال عبر إيداع 100 *frs* في نهاية كل شهر في حساب ادخار ينمو بنسبة 4% طيلة 15 سنة. يتساءل المدخر عن الفرق في نهاية الأمر بين ادخاره بهذه الطريقة أو إيداعه لمبلغ 1200 *frs* في نهاية كل سنة؟

8- كم نحصل في نهاية السنة الثالثة إذا استثمرنا 2000 € عن كل سنة بنسبة فائدة 4% علما بأن القسط الأول تم إيداعه حالا؟

9- كم يبلغ رأس المال الذي وجب امتلاكه اليوم لكي نستطيع تمويل أقساط بـ3000 *frs* في نهاية كل شهر ولمدة خمسة سنوات وكذلك قسطا نهائيا يقدر بـ60000 *frs* يدفع في الشهر الذي يلي آخر شهر في الأقساط؟ نسبة الفائدة المستخدمة: 2%.

10- يعرض أحد البنوك اليوم شروطا للاقتراض لفائدة الخواص بنسبة فائدة سنوية تساوي 9%. أوجد مبلغ القسط المطلوب تسديده شهريا للحصول على قرض يقدر بـ60000 € يسدد على 60 شهرا.

11- إذا دفعنا اليوم مبلغ 12988 € فذلك يغطي مجموع 3 أقساط بـ3000 € للقسط الواحد علما بأن القسط الأول يدفع بعد سنة. ما هي نسبة الفائدة المستخدمة في هذه العملية؟

12- يبلغ القسط السنوي لقرض يقدر بـ 100000 *frs* مقدار 12500 *frs* حيث يسدد القسط الأول سنة بعد الحصول على المبلغ المقرض. إذا كانت نسبة الفائدة تساوي 5,75 % سنويا، كم عدد الأقساط المطلوب سدادها وما هو مقدار القسط الأخير؟

13- يبلغ دخل (قسط) أحد المؤمن لهم البالغ من العمر 43 سنة، 5000 € يدفع شهريا لمدة خمس سنوات. هذا الدخل سوف يصرف للمؤمن له في نهاية كل فترة وحين يبلغ الستين من عمره. ما هو مقدار العلاوة (مبلغ الاشتراك) المطلوب سداده الآن لتمويل هذا الدخل العمري علما بأن نسبة الفائدة تبلغ 3,3%؟

14- ■ ترغب إحدى الجمعيات الخيرية في تقديم الجائزة التالية من خلال منحة حصلت عليها اليوم تقدر بـ 100000 *frs* :

- جائزة تقدر بـ 1000 *frs* تصرف بداية من السنة القادمة ولمدى الحياة.
- جائزة قدرها 5000 *frs* تصرف كل خمس سنوات.
- الرصيد المتبقي يصرف كعلاوة نهاية السنة إلى إجمالي موظفي الجمعية طيلة عشرين سنة.

أوجد مقدار العلاوة الإجمالية المطلوب صرفها إلى الموظفين إذا علمت أن رأس المال ينمو سنويا بنسبة 2,5%؟

15- ■ يدفع أحد الأقساط البالغ 1000 € طيلة خمس سنوات، والقسط الأول يدفع آخر السنة. بداية من السنة الثانية تم توظيف نسبة جديدة على القسط تقدر بـ 2% سنويا مصدرها غلاء المعيشة. أوجد القيمة الحالية لهذا القسط إذا كانت نسبة الفائدة تساوي 5%؟

16- أوجد القيمة الحالية للدفوعات التالية مستخدما عددا من القواعد:

الزمن	0	1	2	3	4	5	6	7
المبلغ		10	20	20	20		50	50

17- أوجد العلاوة P التي تمكن من صرف المبالغ المبينة في الجدول التالي (باليورو):

(أ) بنسبة فائدة 0% . (ب) بنسبة فائدة 5%.

الزمن	0	1	2	3	4	5	6
المبلغ	P	1000	1000	1000	1000	1000	1000

18- أوجد العلاوة P التي تمكن من صرف المبالغ المبينة في الجدول التالي (باليورو) وبنسبة فائدة 5%:

الزمن	0	1	2	3	4	5	6
المبلغ	P	P	P	P	1000	1000	1000

19- ■ أوجد العلاوة P التي تمكن من صرف المبالغ المبينة في الجدول التالي (باليورو) وبنسبة فائدة 5%:

الزمن	0	1	2	3	4	5	6
المبلغ	P	P	*1000*	*2000*	2000	6000	6000

20- ■ ولد السيد X بتاريخ 15.12.1942 وهو بإمكانه تحسين وضعه المالي من خلال إيداع مبالغ مالية غير موجبة في صندوق المعاشات الذي اختاره. وهذه الإيداعات ترصد في حساب ادخار.

في تاريخ 1/ 1/ 1993 أودع لأول مرة مبلغ 15000 *frs* . وبداية من شهر يناير التالي لعيد ميلاده الثالث والخمسين قام بإيداع مبلغ 2000 *frs* في بداية كل سنة. في شهر ديسمبر 2002، أعلمه صندوق المعاشات بأن حسابه لم يعد ينمو بأكثر من 2,5% وهو ما أدى بالسيد X إلى التوقف عن إيداع مبالغ في حسابه.

(أ) كم يبلغ رصيد الحساب في تاريخ 1.1.1993 بعد أن كان ينمو إلى حد هذا التاريخ بنسبة 4,5%؟

(ب) ما هو المبلغ الذي يفترض أن يودعه السيد X بتاريخ 1.1.1993 بدلا عن المقدار 15000 *frs* ليحصل على نفس الرصيد دون إيداع مبالغ سنوية إلى تاريخ 1.1.2003.

(جـ) ما هو رصيد حساب السيد X في 1 يناير الموالي لعيد ميلاده الثالث والستين.

الفصل الخامس

القروض
Les Emprunts

يلجأ الأشخاص والمؤسسات في كثير من الأحيان إلى الاقتراض كوسيلة للتمويل. هذا الفصل يعرف أهم أنواع القروض التي نعترضها في الحياة العملية والقواعد التي تميزها.

ينتهي الفصل بالقروض السندية التي نعرض من خلالها العمليات الحسابية على السندات.

(5.1) التعريفات والرموز

في هذه الفقرة نهتم بالقروض غير المجزأة أي القروض الصادرة عن مقرض واحد وهو عادة المؤسسة المالية، أما الفقرة الأخيرة فهي مخصصة لقروض السندات حيث يتدخل مجموعة من المقرضين.

أهم الأسئلة المتعلقة بالقروض هي:

- معرفة وضع الدين في كل لحظة.
- معرفة المبلغ المطلوب سداده في كل فترة.
- معرفة الفائدة الموجبة عند كل فترة.

المبالغ التي يتم إرجاعها في إطار التمتع بالقروض تسمى أقساط. يشمل القسط الجزء المتعلق بالسداد (يسمى كذلك الاستهلاك المالي) والجزء المتعلق بالفائدة.

(5.1) القسط= الاستهلاك+الفوائد

تعتبر عملية تجزئة القسط إلى جزئين هما: الاستهلاك والفوائد من أهم المفاهيم المستخدمة في الإدارة المالية وكذلك في المحاسبة. حيث يعتبر الجزء من القسط والمتعلق بالاستهلاك سداداً للدين، وهذا يميزه عن الجزء الثاني المتعلق بالفائدة والتي تعتبر تكلفة مالية.

يتم تدوين القسط في الدفاتر المحاسبية على النحو التالي:

الاستهلاك *دين وفرات مقداره* X

الفوائد *تكاليف مالية وفرات*

سوف ندرس في الفقرة التالية ثلاثة أنواع من القروض:

- القروض التي يتم سدادها في آجال محددة.
- القروض التي يتم سدادها باستهلاك ثابت.
- القروض التي يتم سدادها بأقساط ثابتة (الأكثر استخداما).

الرموز:

i نسبة الفائدة السنوية للقرض.

C المبلغ المقرض.

n مدة القرض بالسنوات.

C_k المبلغ المتبقي من القرض في بداية السنة k.

R_k المبلغ الذي تم سداده (الاستهلاك) في نهاية السنة k.

I_k مقدار الفائدة التي تم سدادها في نهاية السنة k.

S_k الاستهلاك التراكمي في نهاية السنة k.

A_k القسط المسدد في نهاية السنة k ($A_k = R_k + I_k$).

ملاحظات:

نتعامل هنا مع القروض السنوية. أما إذا أردنا التعامل مع قروض تسدد بأقساط مدتها m، فيكفي أن نغير نسبة الفائدة السنوية إلى النسبة المعادلة باستخدام القاعدة (3.9) وهي: $i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$. ثم نكتب الفترة السنوية بدلالة m أي mn.

الأقساط الشهرية الثابتة تسمى 'الشهرية'. اصطلاحا نعرف في حساب القروض الفترة وليس العصر أو العهد، حيث إن القرض يبدأ في الفترة الأولى وهذا ما يمكن من التعبير عن رأس المال الأصلي بالرمز $_1$ وليس C_0.

(5.2) القروض ذات الآجال الثابتة

في السنة الأولى من القرض يتضمن القسط الجزء المتعلق بالفائدة فقط. وفي السنة الثانية يتضمن الفائدة مع إجمالي المبالغ المطلوبة لسداد القرض.هذا النموذج من استهلاك القرض يستخدم خاصة في السندات التي سندرسها لاحقا.

القواعد التالية تمكن من إيجاد جميع العناصر المكونة لجدول الاستهلاك:

$$C_k = C \ \forall k \tag{5.2}$$

$$R_k = S_k = \begin{cases} 0 & k < n \\ C & k = n \end{cases} \tag{5.3}$$

$$I_k = iC_k \tag{5.4}$$

$$A_k = R_k + I_k \quad (5.5)$$

مثال: قرض بمبلغ 1000 € وبنسبة فائدة 10% يسدد في أجله بعد أربع سنوات. المطلوب إعداد جدول الاستهلاك وحساب تكلفة القرض

الحل

القسط A_k	الفائدة I_k	الاستهلاك المتراكم S_k	الاستهلاك R_k	حالة الدين C_k	الفترة k
100	100	0	0	1000	1
100	100	0	0	1000	2
100	100	0	0	1000	3
1100	100	1000	1000	1000	4

تكلفة القرض تمثل مجموع الفوائد أي 400 €

(5.3) القروض ذات الاستهلاكات الثابتة

المبلغ المسدد ثابت؛ أي أن المبلغ هو نفسه من سنة إلى أخرى ، القواعد التالية تمكن من إيجاد أي عنصر من عناصر جدول الاستهلاك:

$$C_k = (n-k+1)\frac{C}{n} \quad (5.6)$$

$$R_k = R = \frac{C}{n} \quad (5.7)$$

$$S_k = k\frac{C}{n} \quad (5.8)$$

$$I_k = iC_k \quad (5.9)$$

$$A_k = R_k + I_k \quad (5.10)$$

مثال: قرض بمبلغ 1000 € وبنسبة فائدة 10% يسدد في أجله بعد أربع سنوات. المطلوب إعداد جدول الاستهلاك وحساب تكلفة القرض.

الحل

الفترة k	حالة الدين C_k	الاستهلاك R_k	الاستهلاك المتراكم S_k	الفائدة I_k	القسط A_k
1	1000	250	250	100	350
2	750	250	500	75	325
3	500	250	750	50	300
4	250	250	1000	25	275

تكلفة القرض تمثل مجموع الفوائد أي 250 €

(5.4) القروض ذات الأقساط الثابتة

وهي الحالة الأكثر شيوعا. وتستخدم هذه الحالة من قبل غالبية المؤسسات المانحة للقروض الصغيرة والإيجار المالي، فالشخص المقرض يعلم مسبقا مقدار المبالغ التي عليه تسديدها من سنة إلى أخرى. هذا المقدار هو في الواقع حاصل المعادلة الأكتوارية التالية: $C = Aa_{\overline{n|}}$ والتي سندرسها في الفصل القادم.القواعد التالية تمكن من إيجاد أي عنصر من عناصر جدول الاستهلاك:

$$A_k = A = \frac{C}{a_{\overline{n|}}} \quad (5.11)$$

$$C_k = Aa_{\overline{n-k+1|}} \quad (5.12)$$

$$R_k = A - iC_k \quad (5.13)$$

$$S_k = Av^n s_{\overline{n|}} \quad (5.14)$$

$$I_k = iC_k \quad (5.15)$$

مثال رقم (1): قرض بمبلغ 1000 € وبنسبة فائدة 10% يسدد في أجله بعد أربع سنوات. المطلوب إعداد جدول الاستهلاك وحساب تكلفة القرض

الحل

تم اختزال المنازل العشرية لجميع الأرقام:

الفترة k	حالة الدين C_k	الاستهلاك R_k	الاستهلاك المتراكم S_k	الفائدة I_k	القسط A_k
1	1000	215	215	100	315
2	785	237	452	78	315
3	548	261	713	55	315
4	287	287	1000	29	315

تكلفة القرض تمثل مجموع الفوائد؛ أي 262 €. وهذه النتيجة يمكن أن نحصل عليها من خلال: $nA - C$

مثال رقم (2): عرضت مؤسسة مالية الشروط التالية للحصول على قرض: نسبة الفائدة: 9%، المبلغ المقرض: 90000 frs مدة القرض: 5 سنوات والأقساط تسدد شهريا.

أوجد القسط الشهري وكذلك جميع العناصر المدرجة بالسطر رقم 13 من جدول الاستهلاك

الحل

نبدأ أولا بحساب: $i_{12} = (1+0{,}09)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0{,}007207323$ والمدة بالأشهر نكتبها كالآتي شهرا $n = 5 \times 12 = 60$ ثم يتم حساب $a_{\overline{60|}}$ بنسبة فائدة $0{,}007207323$ وهو ما يعطي: $a_{\overline{60|}} = 48{,}57123807$

القسط المطلوب هو – إذن –: $A = \frac{50'000}{a_{\overline{60|}}} = \frac{50'000}{48{,}57123807} = 1'029{,}40\ frs$

السطر الثالث عشر لجدول الاستهلاك (القسط الأول في السنة الثانية) يكتب على النحو التالي:

$$C_{13} = Aa_{\overline{60-13+1|}} = 1029{,}4158a_{\overline{48|}} = 41'645{,}40\ frs$$

$$S_{13} = Av^n s_{\overline{13|}} = 9083,90\ frs$$
$$I_{13} = iC_{13} = 300,15\ frs$$
$$A_{13} = A = 1029,40\ frs$$

إكسل

في برنامج إكسل لا توجد قواعد تمكن من الحصول على القيم المختلفة لجدول الاستهلاك. في المقابل يمكن بسهولة إعداد جداول الاستهلاكات باتباع الخطوات التالية:

(أ) القرض ذو الاستهلاك الثابت

نبدأ بحساب القيمة: $R = \frac{C}{n}$ والتي نقوم بنسخها لجميع الفترات، بالنسبة للفترة الأولى نستخدم المعادلة: $C_1 = C$. وبالنسبة لبقية الفترات نسحب رأس المال المتبقي باستخدام المعادلة: $C_k = C_{k-1} - R_{k-1}$. ثم نستعمل الرمز iC_k لملء العمود المخصص للفائدة. أما عمود القسط A_k فيمكن إيجاده من خلال القاعدة: $A_k = R_k + I_k$. بالنسبة للسنة الأولى الاستهلاك المتراكم يساوي استهلاك الفترة ($S_1 = R_1$). أما بالنسبة للفترات الأخرى يمكن استخدام المعادلة التالية: $S_k = S_{k-1} + R_k$

(ب) القرض ذو القسط الثابت

نبدأ بحساب القيمة $A = \frac{C}{a_{\overline{n|}}}$ التي نقوم بنسخها لجميع الفترات. بالنسبة للفترة الأولى نجد: $C_1 = C$. أما الفترات اللاحقة الأخرى فنحسب رأس المال المتبقي من خلال العلاقة: $C_k = C_{k-1} - R_{k-1}$ ثم نستخدم القاعدة iC_k لحساب الفوائد. أما الحقل الذي يحتوي على الاستهلاك A_k فهو حاصل العلاقة التالية: $R_k = A_k - I_K$. كذلك بالنسبة للفترة الأولى، الاستهلاك المتراكم يساوي استهلاك الفترة ($C_1 = R_1$) وبالنسبة لبقية الفترات نستخدم العلاقة: $S_k = S_{k-1} + R_k$.

(5.5) القروض السندية

على عكس القروض الشخصية أو الفردية فإن السندات تستدعي مجموعة كبيرة من المقرضين نسميهم المساهمين، وهؤلاء المساهمون يحصلون مقابل المبالغ التي أقرضوها على شهادات تسمى سندات. كل سند هو ممثل بجزء نسبي من القرض ويتم إدراجه في السوق المالية (البورصة). يقتصر طرح مثل هذه القروض على الشركات الكبرى حيث يمكن من جمع مبالغ مالية ضخمة.

السند هو أداة دين مالية قابلة للتفاوض تصدرها هيئة عمومية (الدولة، منظمة حكومية أو أهلية) ويمثل جزء من قرض طويل الأجل وتعطي هذه الأداة صاحبها أحقية استلام الأرباح (الفوائد) التي تصرف في الغالب سنويا كما تعطيه أحقية استرجاع المبلغ المقرض عند انقضاء الأجل.

أهم خصائص السندات

القيمة الاسمية للسند وهي القيمة التي تحسب على أساسها الفوائد.

العائد الاسمي وهي نسبة الفائدة الاسمية التي تمكن من حساب الفائدة الموظفة على القيمة الاسمية لسند والتي يتم صرفها للمساهمين.

كذلك نسمي الفائدة الموظفة على سند "عائد الكوبونCoupon Interest".

سعر الطرح أو سعر الاكتتاب هو السعر الفعلي المدفوع من المساهم ليصبح متملكا لسند. غالبا يتم طرح السند بحسب القيمة الاسمية أو أقل.

عائد الاستحقاق Yield to Maturity هو المبلغ الفعلي الذي يتم صرفه للمقرض عندما يحين موعد استحقاق السند. هذا الاستحقاق من المتوقع أن يكون مساوياً للقيمة الاسمية أو أكثر.

يتم صرف الاستحقاق لجميع السندات في أغلب الحالات مرة واحدة على إثر انتهاء عملية الاقتراض. ونسمي عملية الاسترداد هذه إن فاين "in fine" .

وهو ما يرجعنا إلى القرض ذي الأجل الثابت فقرة (5.2). في كل سنة يتم دفع الكوبون فقط. وهذا يمثل بالنسبة للمقرض تكاليف مالية مهمة في نهاية آخر أجل. بسبب التعقيدات الإدارية فإن استحقاق الأقساط الثابتة لم يعد مستخدما، وبالتالي لن يتم التطرق إليه.

الرموز:

C القيمة الاسمية لسند.

N عدد السندات التي تم طرحها.

n المدة المتبقية للاستحقاق.

i نسبة الفائدة الاسمية للسند.

c الكوبون $(c = iC)$.

E سعر الطرح أو المساهمة.

R سعر الاستحقاق.

x معدل العائد الأكتواري (ARR).

P السعر الحالي للسند.

مثال: أصدرت إحدى الشركات سندات في شهر يونيو 2004 تنتهي بعد 10 أعوام بقيمة 3000000 يورو و300 سند أي بحساب 10000 يورو كقيمة اسمية للسند الواحد. نسبة التغطية: 99.5%. الاستحقاق بالقيمة الاسمية عند الأجل. العائد الاسمي: 4.5%. أوجد مختلف الرموز.

الحل

القيم المطلوبة هي التالية:

$$C = 10000 \; N = 300 \; CN = 3000000 \; n = 10 \; i = 0{,}045$$
$$E = 0{,}995 \times 10'000 = 9950 \; R = 10000 \; c = 450$$

(5.5.1) سعر السند عند الاستحقاق

في كل لحظة، يمكن حساب سعر السند الذي يساوي القيمة الحالية للكوبونات زائد عائد الاستحقاق على السند. ويتم تحديد القيمة الحالية على حسب نسبة الفائدة الحالية المستخدمة في سوق السندات لسندات مماثلة وبنفس المدة. وبالتالي إذا كانت المدة المتبقية n سنة فإن السعر الحالي للسند بنسبة فائدة i تساوي:

$$P = ca_{\overline{n|}} + Rv^{n} \quad (5.16)$$

أي أن السعر الحالي للسند هو مجموع القيمة الحالية للكوبونات المستقبلية زائد القيمة الحالية لعائد الاستحقاق إن فاين *in fine*

مثال: احسب السعر الحالي للسند إذا توفر لديك المعلومات التالية:

نسبة الفائدة السوقية:4% الكوبونات السنوية تساوي 450 *frs*. الاستحقاق على القيمة الاسمية بعد 5 سنوات: 10000 *frs*.

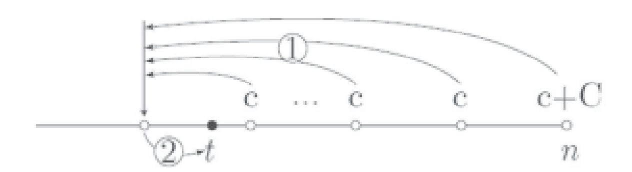
الحل

السعر الحالي للسند يتم تحديده من خلال القاعدة:

$$P = 450a_{\overline{5|}} + 10'000v^{5} = 10'222{,}60\, frs$$

(5.5.2) سعر السند في تاريخ معين

إذا كنا نبحث عن سعر السند في تاريخ مختلف عن تاريخ صرف الكوبون، فإن أسهل طريقة لعمل ذلك تتمثل في حساب الخصم على سعر السند قبل سنة من صرف الكوبون القادم ① ثم حساب العائد على رأس المال للقيمة المتحصل عليها إلى حين تاريخ صرف الكوبون ②. الرسم البياني التالي يوضح هذه الطريقة:



مثال: أوجد السعر الحالي للسند إذا توفر لديك المعلومات التالية:

نسبة الفائدة السوقية:7 % الكوبونات السنوية تساوي 400 € لقيمة اسمية تساوي 5000 €. متبقي 6 كوبونات على السند والكوبون القادم يحل أجله بعد 3 أشهر.

الحل

نبدأ بحساب:

① $400a_{\overline{5|}} + 5000v^6 = 5'238{,}33$

② نحسب العائد على رأس المال لهذه القيمة بعد فترة 9 أشهر:

$$5'238{,}33 \times 1{,}07^{9/12} = 5511{,}00\ €$$

(5.5.3) معدل العائد الأكتواري

معدل العائد الأكتواري x يعرف بأنه العائد الذي يحقق المعادلة التالية بدلالة المدة المتبقية للاستحقاق n:

عند الطرح:

$$E = ca_{\overline{n|}} + Rv^n \tag{5.17}$$

في تاريخ معين:

$$P = ca_{\overline{n|}} + Rv^n \tag{5.18}$$

وهذه القاعدة يمكن كتابتها على الشكل:

$$E = \underbrace{\frac{c}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2} + \frac{c}{(1+x)^3} + \cdots + \frac{c}{(1+x)^n}}_{\text{القيمة الحالية للكوبونات المستقبلية}} + \underbrace{\frac{R}{(1+x)^n}}_{\text{القيمة الحالية للاستحقاق } in\ fine} \quad (5.19)$$

مثال: أوجد معدل العائد الأكتواري عند الطرح لسند معرف من خلال البيانات التالية:

الكوبونات السنوية: 450 € القيمة الاسمية 10000€، سعر الطرح 9950 € وتاريخ الاستحقاق بالقيمة الاسمية بعد عشر سنوات.

الحل رقم (1): طريقة التصنيف

باستخدام طريقة التصنيف المبينة في الفقرة 17.4.1 يجب إبراز هذه المعادلة على الصورة الجبرية التالية:

$$f(i) = 450\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{i} + 10'000\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10} - 9'950 = 0$$

نضع أولا كقيم مبدئية مثلا: $b = 0,1$ $a = 0,01$ ؛ حيث $f(a)f(b) < 0$

الجدول التالي يؤدي في نهاية العملية رقم عشرين إلى الحل:

$f(m)f(b)$	m	b	n
>0	,0550	,10	,010
<0	,03250	,0550	,010
<0	,043750	,0550	,03250
...	...	...	....
>0	**0,045633984**	,0456341550	,0456338120

الحل هو إذاً: $i = 4,5634\%$

الحل رقم (2): طريقة النقطة الثابتة

لكي نتمكن من استخدام هذه الطريقة يجب تحويل المعادلة (5.18) لتأخذ الصورة: $i = f(i)$ وهذا الأسلوب الذي يمكن اتباعه:

$P = ca_{\overline{n|}} + Rv^n$ المعادلة الأصلية.

$P = ca_{\overline{n|}} + R\,(1 - ia_{\overline{n|}})$ حساب ^{n} بدلالة $a_{\overline{n|}}$.

$P = R + \,(c - Ri)\,a_{\overline{n|}}$ تجميع وإظهار العبارة $\overline{n|}$.

$i = \frac{c}{R} - \frac{P-R}{Ra_{\overline{n|}}}$ عزل i للحصول على العلاقة $i = f\,(i)$.

وهكذا فإن العلاقة المطلوبة هي:

$$i = \frac{450}{10000} - \frac{9950-10000}{10000a_{\overline{10|}}}$$

والتي يمكن كتابتها أيضا:

$$i = 0{,}045 + \frac{0{,}005}{a_{\overline{10|}}}$$

انطلاقا من قيمة معينة لـ i مثلا: $i = 0{,}1$ نتجه بسرعة إلى الحل النهائي على النحو التالي:

$f\,(i)$	i	n
,0458137270	,10	0
,0456344250	,0458137270	1
,0456338670	,04456344250	2
,0456338650	,04563388670	3
0,045633865	,0456338650	4

الحل هو إذا: $i = 4{,}5634\%$

الحل رقم (3): استخدام إكسل

لاستخدام هذه الطريقة المبينة في الفقرة رقم (17.4.3) نكتب القاعدة القاعدة التالية ثم نستخدم الأمر استهداف Goal Seek:

	A	B	C	D
1	i	السعر		
2	0,1	=450*PV(A2,10,-1,0,0)+10000*(1+A2)^-10-9950		
3				

Goal Seek

Set cell: B2

To value: 0

By changing cell: A2

OK Cancel

وهو ما يعطينا الحل الآتي: $i = 4{,}5634\%$

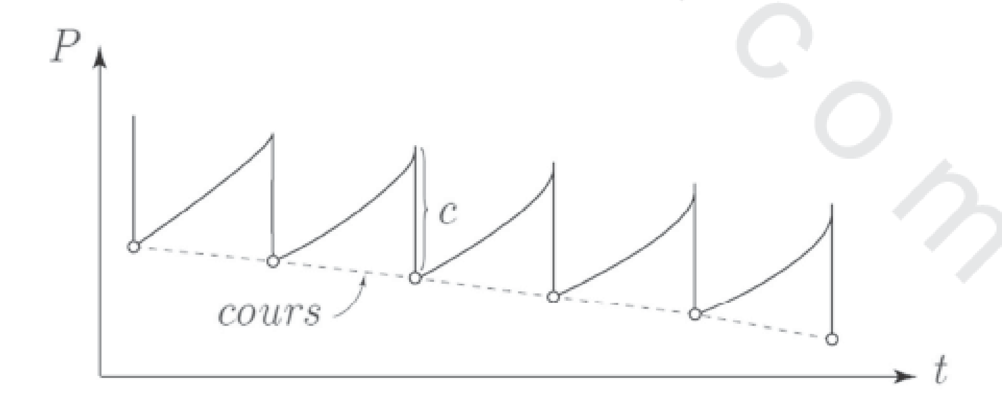
الحل رقم (4): استخدام الالة الحاسبة تي آي-83

لاستخدام هذه الطريقة المبينة في الفقرة (17.4.3)، نكتب القاعدة التالية في محرر الحلال Solver editor:

بالضغط على ALPHA SOLVER نحصل على نسبة الفائدة السوقية التي نبحث عنها: $i = 4{,}5634\%$

(5.5.4) سعر التداول

يتغير سعر التداول للسند بتغير الزمن على النحو التالي:



نلاحظ نموا للسعر في الفترة الموجودة بين تسديد قيمة الكوبونات ثم تراجعا للسعر عند صرف قيمة الكوبونات. وهذا التذبذب في سعر السند لديه بلا شك تأثير غير مرغوب فيه لدى المستثمرين. لذلك فإن عبارة سعر التداول يقصد بها أن السعر يتغير من فترة إلى أخرى.

هذا السعر المبين من خلال السطر المنقط في الرسم يمكن من إظهار تطور منتظم لسعر السند. ويعرف السعر من خلال المعادلة التالية التي تكتب بدلالة الجزء f من السنوات المنقضية على السند: $0 < f < 1$

$$\text{السعر} = P - fc \tag{5.20}$$

العبارة fc ترمز إلى الفوائد الجارية.

يكتب سعر السند كذلك وفي أغلب الأحيان في صورة نسبة مئوية (%) للقيمة الاسمية C للسند وهو ما يمكن بيانه على الشكل التالي:

$$\text{السعر (\%)} = \frac{\text{السعر}}{C} \times 100 \tag{5.21}$$

مثال: احسب سعر التداول لسند في صورة نسبة مئوية إذا علمت أن القيمة الاسمية للسند تساوي 2000 € والكوبونات السنوية تبلغ 150 €. السعر الحالي للسند يبلغ 2180 € والكوبون القادم يصرف بعد شهرين.

الحل

مرت 10 أشهر على صرف آخر كوبون، وبالتالي:

$$\text{السعر} = 2180 - \frac{10}{12} \times 150 = 2055\ €$$

يكتب سعر التداول في صورة نسبة مئوية إذا تمت قسمة السعر على القيمة الاسمية للسند: $\frac{2055}{2000} \times 100 = 102{,}75\ \%$

(5.5.5) القيم الحالية للفوائد المستقبلية ولعائد الاستحقاق:

القيمة الحالية للفوائد المستقبلية تتغير تبعا لتغير نسبة الفائدة السوقية. وهو ما يؤثر بدوره على القيمة الحالية للاستحقاق.

القيمة الحالية (أو الحاضرة) للسند هي مجموع القيم الحالية للفوائد الناتجة عن امتلاك السند زائد قيمة الحالية للاستحقاق.

مثال: احسب القيمة الحالية لسند مجزأ بين القيمة الحالية للفوائد المستحقة واستحقاق القيمة الاسمية معتمدا على البيانات التالية:

نسبة الفائدة السوقية: 4%. الكوبونات السنوية: 450 *frs* الاستحقاق على القيمة الاسمية بعد خمس سنوات يبلغ: 10000 *frs*

الحل

نستخدم القاعدة التالية لحساب سعر السند:

$P = 450a_{\overline{10|}} + 10000v^5 = 10222{,}60\ frs$ القيمة الحالية للاستحقاق تساوي:

$$10000v^5 = 8219{,}27\ frs$$

القيمة الحالية للفوائد المستقبلية هي: $450a_{\overline{10|}} = 2003{,}33\ frs$

تجد مثل هذه المفاهيم (القيم الحالية للفوائد المستقبلية والاستحقاق) في مجال 'التوثيق' وخصوصا في العمليات المتعلقة بتقسيم الإرث ميدانا خصبا للتطبيق.

حيث إن كل ممتلك أو رأس مال يمكن تقسيمه إلى قسمين: حق الانتفاع (القيمة الحالية للفوائد المستقبلية) والقيمة الصافية للممتلك (القيمة الحالية للاستحقاق). عند وفاة صاحب الحق في الانتفاع فإن مالك القيمة الصافية

للممتلك يسترجع كامل حقوقه. مثلا: في حالة العقار صاحب الحق في الانتفاع له حق استغلال العقار بفوائده وغلته بينما صاحب القيمة الصافية للعقار ليس إلا مالكا له.

مثال: باعت أم في عمر 70 عاما (بمعدل حياة يقدر بـ 15 سنة) وولدها مسكناً بلغت قيمته 800000 *frs*. الأم تعتبر صاحبة حق الانتفاع بينما الولد هو في حقيقة الأمر صاحب الاستحقاق (مالك المسكن). إذا عملت أن قيمة المسكن الاستئجارية تساوي 5%، ما هو نصيب كل من الأم والولد في المبلغ المتحصل عليه من عملية البيع علما بأن نسبة الفائدة تبلغ 3%؟

الحل

لنرمز إلى X نصيب الولد (صاحب قيمة الاستحقاق). نستطيع وضع المعادلة التالية: $800000 = 40000a_{\overline{15|}} + Xv^{15}$

وبالتالي: $X = 502417{,}37$

نصيب الولد:

$$502417{,}37v^{15} = 322482{,}00\ frs$$

نصيب الأم:

$$40000a_{\overline{15|}} = 477517{,}40\ frs$$

(5.6) التمارين

1- قرض يقدر بـ 100000 € يسترجع بمبلغ واحد يساوي 110000 € خلال أربع سنوات. أوجد نسبة الفائدة المستخدمة.

2- قرض بمبلغ 6000 *frs* يسترجع عبر قسطين: الأول بقيمة 3000 *frs* بعد سنة والثاني بقيمة 4000 *frs* بعد سنتين.

(أ) احسب نسبة الفائدة السنوية للقرض.

(ب) أوجد جدول الاستهلاك لهذا القرض.

3- أوجد السطر الخامس لجدول الاستهلاك لقرض باستهلاك ثابت يبلغ 12000 frs علما بأن مدة القرض 5 سنوات ونسبة الفائدة السنوية 9.5%. الأقساط تسدد كل ثلاثة أشهر.

4- لدينا مقدار القسط الخامس الذي بلغ 222 € لقرض يسدد باستهلاكات ثابتة، أما القسط السادس فقد بلغ 210 € كما بلغت نسبة الفائدة: 8%. أوجد المدة وكذلك مقدار المبلغ المقرض؟

5- ■بين أن عملية استرداد القرض بأقساط ثابتة تمثل رياضيا متوالية هندسية أساسها $r = 1 + i$.

6- يسدد دين قيمته 40000€ على 10 أقساط سنوية ثابتة بمقدارX. أول قسط يتم دفعه بعد عشر سنوات.

(أ) أوجد معادلة التوازن الأكتواري.

(ب) أوجد القيمة X إذا كانت نسبة الفائدة السنوية تساوي 7%.

7- يسدد قرض في مدة عشر سنوات بأقساط ثابتة وبمعدل قسط واحد كل سنتين. أوجد السطر الثالث من جدول الاستهلاك إذا كانت نسبة الفائدة المستخدمة تقدر بـ8% ومبلغ الدين يقدر بـ15000 €.

8- قرض يتم تسديده بأقساط ثابتة عددها 10. يبلغ الاستهلاك الثالث 782 €. والاستهلاك السادس يبلغ 1012,7 €.

(أ) أوجد نسبة الفائدة السنوية.

(ب) أوجد مقدار القرض.

(جـ) أوجد مقدار المبلغ المتبقي من القرض بعد تسديد القسط السابع.

(د) أوجد السطرين الأخيرين من جدول الاستهلاك.

9- قرض مقداره 100000 € ونسبة فائدته 4,30%، بينما بلغت الأقساط الشهرية 750,64€. احسب نسبة الفائدة الفعلية التي يتحملها المقرض إذا أخذنا في الاعتبار تكلفة 800 € مقابل مصاريف إدارية موظفة من قبل المؤسسة المالية.

10- أوجد السطر الثاني عشر من جدول الاستهلاك لقرض مقداره 35000 *frs* يتم استرجاعه بأقساط ثابتة مدتها 5 سنوات. نسبة الفائدة السنوية للقرض: 9,5%.

11- ■ قرض يبلغ 100000 € بنسبة فائدة 9% يسترجع في مدة 15 سنة بأقساط ثابتة. بعد تسديد القسط السادس، قرر المقرض خفض نسبة الفائدة إلى 8% لبقية الاقساط.

(أ) ما هو مقدار القسط الجديد؟

(ب) كم عدد الأقساط المتبقية إذا واصلنا تسديد نفس مقدار القسط الأول وكم يبلغ مقدار القسط الأخير؟

12- ■ عجز أحد العملاء عن دفع القسط الشهري الخامس عشر لقرض يبلغ 30000 € (أقساط ثابتة لمدة خمس سنوات). يرغب العميل في تمديد مبلغ الدين المتخلد بذمته على فترة 10 سنوات. احسب القسط الشهري الجديد إذا كانت نسبة الفائدة السنوية تبلغ 9,5%.

13- عجز أحد العملاء عن دفع القسط الشهري الخامس عشر لقرض يبلغ 30000 € (أقساط ثابتة لمدة خمس سنوات). في المقابل فهو قادر على دفع 60% مما يدفعه الآن. وافق المسؤول البنكي على إعادة جدولة الدين لهذا العميل

بمنحه مدة تسديد أطول. إذا علمت ان نسبة الفائدة السنوية تبلغ 9,5%. أوجد عدد الأقساط وكذلك مقدار القسط النهائي الجزئي.

14- ★ شاهدا نيكولا وسيبستيان الإعلان التالي: يمنحك بنك 'قروسو' يقترح عليكم قرضا لمدة أربع سنوات بنسبة فائدة سنوية 9,85% وبأقساط أو استهلاكات ثابتة. فقام الرجلان باقتراض نفس المبلغ من البنك. نيكولا اختار نظام الاقتراض باستهلاكات ثابتة بينما اختار سيبستيان نظام القسط الثابت. بعد فترة قال نيكولا لسيبستيان: لقد سددت الآن نفس القسط الذي تقوم أنت بتسديده. هل تستطيع تحديد تاريخ بداية الاقتراض عند الطرفين؟

15- ★ أقرضت إحدى المؤسسات البنكية رجلا يدعى 'دونيس' مبلغا وطلبت منه إرجاعه في مدة عشر سنوات بدون فوائد وبالطريقة التالية:

- في نهاية السنة الأولى يرجع نصف المبلغ.
- في نهاية السنة الثانية يرجع ثلث المبلغ المتبقي.
- في نهاية السنة الثالثة يرجع ربع المبلغ المتبقي.
- ... .
- في نهاية السنة التاسعة يرجع عشر المبلغ المتبقي.
- في نهاية السنة العاشرة يرجع المبلغ المتبقي وهو 300 €.

إذا علمت أن جميع العمليات تتم بأرقام صحيحة وباليورو. ما هو المبلغ المقرض لـ'دونيس'؟

16- يحصل مالك أحد السندات على مبلغ 80 € في نهاية السنوات 2005 و2006 و2007 و2008 و2009 وعلى مبلغ نهائي يقدر بـ2080€ في نهاية السنة

2010. ما هو سعر هذا السند بتاريخ 1.1.2005 الذي يمكن من تحقيق معدل عائد يساوي 6%؟

17- تبلغ القيمة الاسمية أحد السندات *frs* 5000 وتحقق نسبة فائدة سنوية تقدر بـ7%.وهي مستحقة بالقيمة الاسمية خلال أربع سنوات. سعر السند الحالي هو *frs* 5220 . أوجد معدل عائد الاستحقاق لهذا السند؟

18- نشتري سند قيمته 10000€ بمبلغ 9900 € بنسبة فائدة 4,5% تسترجع بآجال ثابتة خلال خمس سنوات. الفائدة الاسمية تدفع بأجزاء نصف سنوية. ما هو معدل عائد الاستحقاق لهذا السند؟

19- سند قيمته *frs* 5000 بكوبونات سنوية تقدر بـ6% تم شراءه بعد 15 يوما من الحصول على الكوبون المتداول بسعر *frs* 92,50 . أوجد سعر السند؟

20- سند بقيمة اسمية بلغت 1000 € ومتبقي له 8 كوبونات نسبة الفائدة المستحقة لها 3% سنويا. أوجد سعر التداول للسند بنسبة تقييم 5%:

(أ) 5 سنوات قبل انتهاء الأجل.

(ب) 4 سنوات وشهرين قبل انتهاء الأجل.

(جـ) 3 سنوات و3 أشهر قبل انتهاء الأجل.

21- تقدر قيمة أحد الممتلكات العقارية بـ 500000 € كما تقدر قيمته الاستئجارية السنوية بـ5%. ما هو نصيب استحقاق الملكية الراجع للسيدة "مارتان" البالغة من العمر 77 سنة والتي يقدر توقع عمرها 11 سنة. نسبة الفائدة المستخدمة: 3%.

الفصل السادس

استهلاك الأصول الثابتة

Les Biens D'èquipement

يستعرض الفصل أهم الطرق الرياضية المتعلقة باستهلاك الأصول الثابتة والمفاضلة بين مختلف الاستثمارات، وهذه المفاضلة سوف يتم تحليلها من خلال عدة معايير، من بينها القيمة الصافية الحالية، معدل العائد الداخلي أو سعر الربحية.

(6.1) الاستهلاكات

تخضع التجهيزات والمعدات إلى تهالك تدريجي ناتج عن التلف والتقادم.هذا الانخفاض في قيمة المعدات يتم تدوينه في المحاسبة كتكلفة ويسمى الاستهلاك المحاسبي. يجب التمييز بين الاستهلاك المالي الذي يمثل سداد الدين والاستهلاك المحاسبي الذي ينطوي على انخفاض في قيمة وسائل الإنتاج.

بعض المعدات تسجل خسارة شبه منتظمة في قيمتها على عكس معدات أخرى التي تتهالك بسرعة أكبر في السنوات الأولى. سوف نتعرض هنا إلى الطرق المستخدمة عمليا لوصف مختلف هذه الظواهر.

فيما يلي نستعرض القواعد الموجودة في مايكروسوفت إكسل ونعرض الصيغة التي تكتب على أساسها هذه القواعد. ولمزيد من المعلومات يمكن الاستعانة بالدعم المتوفر في البرنامج حول استخدام هذه الدوال.

الرموز:

V_0 القيمة الأولية للأصل الثابت.

V_k قيمة الأصل الثابت بعد الاستهلاك رقم k.

V_n القيمة التخريدية للأصل الثابت.

A_k مقدار الاستهلاك للفترة k $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

n عدد سنوات الاستهلاك.

i معدل الاستهلاك.

(6.1.1) طريقة القسط الثابت

المبدأ

قيمة الأصول الثابتة تنقص بمبلغ سنوي ثابت طيلة سنوات عمرها الإنتاجي.

$A_k = A \; \forall \; k \in \{1; 2; \ldots; n\}$ وهذا يمكن من:

قيمة الأصل الثابت بعد سنة: $V_1 = V_0 - A$.

قيمة الأصل الثابت بعد سنتين: $V_2 = V_1 - A = V_0 - 2A$.

قيمة الأصل الثابت بعد 3 سنوات: $V_3 = V_2 - A = V_0 - 3A$ وهكذا...

قيمة الأصل الثابت بعد n سنة: $V_n = V_0 - nA$.

نستطيع أن نستنتج:

$$A = \frac{V_0 - V_n}{n} \quad (6.1)$$

مثال: فقدت آلة تم اقتناؤها بمبلغ 1000 €، 90% من قيمتها خلال 5 سنوات. أوجد الاستهلاك السنوية المسجل باستخدام طريقة القسط الثابت. ثم أوجد جدول الاستهلاك.

الحل رقم (1)

لدينا القيم التالية: $V_0 = 10000, V_n = 100, n = 5$ إذا:

$$A = \frac{1'000-100}{5} = \frac{900}{5} = 180\ €$$

جدول الاستهلاك:

الفترة	الاستهلاك	القيمة
0		1000
1	180	820
2	180	640
3	180	460
4	180	280
5	180	100

الحل رقم (2): استخدام إكسل

في إكسل يجب استخدام الدالة $SLN\ (V_0; V_n; n)$

$$A = SLN(1000; 100; 5) = 180\ €$$

ملاحظة: تناسب هذه الطريقة خصوصا المعدات التي تسجل تهالكا ثابتا، كالأثاث المكتبي مثلا.

(6.1.2) طريقة مجموع أرقام السنين

المبدأ

تتناقص قيمة الأصل الثابت بطريقة طردية معاكسة لترتيب السنوات. مثلا، إذا كان أصل يقدر عمره الإنتاجي بـ4 سنوات فإن استهلاكه السنة الأولى

يبلغ $^{4}/_{10}$ والسنة الثانية $^{3}/_{10}$ والسنة الثالثة $^{2}/_{10}$ والسنة الأخيرة $^{1}/_{10}$.
الأساس المشترك هو الرقم 10 الذي يساوي مجموع الأرقام: 1+2+3+4.

هذه الطريقة توصف رياضيا على النحو التالي:

$$A_k = \frac{V_0 - V_n}{S_n}\,(n - k + 1)$$

حيث n تساوي مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى n

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

وهو ما يمكن من كتابة ما يلي: $\forall\, k \in \{1; 2; \ldots; n\}$

$$A_k = \frac{2\,(V_0 - V_n)}{n\,(n+1)}\,(n - k + 1) \qquad (6.2)$$

مثال: تبلغ القيمة الأولية لأحد الأصول 75000 frs وسوف يتم استهلاكه في مدة خمسة سنوات بطريقة مجموع أرقام السنين.

أوجد جدول الاستهلاكات

الحل رقم (1): الطريقة العادية

نبـــدأ أولا بإيجـــاد $S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$؛ وبالتـــالي فـــإن الاستهلاكات تحسب كالآتي:

$$A_1 = {}^{5}/_{15} \times 75'000 = 25'000\ €$$

$$A_2 = {}^{4}/_{15} \times 75'000 = 20'000\ €$$

$$A_3 = {}^{3}/_{15} \times 75'000 = 15'000\ €$$

$$A_4 = {}^{2}/_{15} \times 75'000 = 10'000\ €$$

$$A_5 = {}^{1}/_{15} \times 75'000 = 5'000\ €$$

جدول الاستهلاك:

الفترة	الاستهلاك	القيمة
0		'00075
1	'00025	'00050
2	'00020	'00030
3	'00015	'00015
4	'00010	'0005
5	'0005	0

الحل رقم (2): استخدام القاعدة (6.2)

لكل قيمة من القيم التالية للمؤشر k $\forall k \in \{1; 2; ...; n\}$ نوجد جميع القيم A_k حيث تساوي هذه القيمة لـ $k = 3$ مثلا:

$$A_3 = \frac{2(75'000-0)}{5\times6}(5-3+1) = 15'000\,€$$

الحل رقم (3): استخدام إكسل

في برنامج إكسل يجب استخدام الدالة $SYD(V_0; V_n; n; k)$

$$A = SYD(75000; 0; 5; 3) = 15'000€$$

ملاحظة: يناسب هذا النوع من الاستهلاك المعدات والممتلكات التي تستهلك بقوة في السنوات الأولى من استخدامها كالسيارات مثلا.

(6.1.3) طريقة القسط المتناقص

المبدأ

نطبق على قيمة الخردة معدل استهلاك ثابت، وعمليا يعد هذا النموذج من أكثر النماذج استخداما.

قيمة الأصل بعد سنة : $V_1 = V_0 - V_0 i = V_0\,(1-i)$.

قيمة الأصل بعد سنتين : $V_2 = V_1 - V_1 i = V_0\,(1-i)^2$.

....

قيمة الأصل بعد n سنة : $V_n = V_0\ (1-i)^n$.

وهذا ما يؤدي إلى حساب ما يلي:

$$i = 1 - \sqrt[n]{\frac{V_n}{V_0}} \qquad (6.3)$$

علما بأن: $A_k = V_{k-1} i$ (مبدأ طريقة القسط المتناقص)، أي:

$$A_k = V_0\ (1-i)^{k-1} i \qquad (6.4)$$

نستنتج أن هذه الطريقة لن تؤدي إلى قيمة خردة مساوية للصفر ($V_n \neq 0$)

بالتعويض عن قيمة (6.3) في القاعدة (6.4) نستطيع أن نكتب k على النحو التالي:

$$A_k = V_0 \left\{ \left(\frac{V_n}{V_0}\right)^{\frac{k-1}{n}} - \left(\frac{V_n}{V_0}\right)^{\frac{k}{n}} \right\} \qquad (6.5)$$

مثال: أصل بقيمة أولية تقدر بـ1000 € وجب استهلاكه في مدة خمس سنوات باستخدام طريقة القسط المتناقص. قيمة الخردة تقدر بـ200 €. أوجد جدول الاستهلاك.

الحل (1): الطريقة العادية

نبدا أولا بإيجاد معدل الاستهلاك i:

$$i = 1 - \sqrt[4]{\frac{200}{1\prime000}} \approx 0{,}33126$$

نطبق بعد ذلك ولكل سنة هذا المعدل على القيمة في بداية السنة، وهذا ما يمكن - بعد الاستعانة ببرنامج الجداول الإلكترونية - من حساب جدول الاستهلاك التالي:

جدول الاستهلاك:

الفترة	الاستهلاك	القيمة
0		'0001
1	,26331	,74668
2	,52221	,22447
3	,14148	,07299
4	,0799	200

الحل رقم (2): استخدام القاعدة (6.2).

لكل قيمة من القيم التالية للمؤشر k $\forall k \in \{1; 2; \dots; n\}$ نوجد جميع القيم A_k حيث تساوي هذه القيمة لـ $k = 3$ مثلا:

$$A_3 = 1'000\ (1 - 0{,}33126)^2 \times 0{,}33126 = 148{,}14\ €$$

الحل رقم (3): استخدام إكسل

في إكسل يجب استخدام الدالة المدرجة في البرنامج $DB\ (V_0; V_n; n; k)$

$$A = DB(1000; 200; 4; 3) = 148{,}14\ €$$

ملاحظة: طريقة القسط المتناقص تناسب الأصول التي تسجل اسهتلاكا قويا جدا في السنوات الأولى من الاستخدام مثل الحواسيب الآلية. وهذه الأصول تسجل انخفاضا في قيمتها أكثر حدة في السنوات الأولى من الأصول التي تحسب حسب طريقة مجموع أرقام السنين.

طرق القسط المتناقص ومجموع أرقام السنين يمكن أن تقرأ استهلاكاتها بطريقة تصاعدية إذا عكسنا ترتيب هذه الاستهلاكات. وهو ما يتم فعليا أحيانا

عندما نريد حساب استهلاك الأصول التي تنقص قيمتها بنسب ضعيفة في السنوات الأولى، وبنسب قوية في السنوات الأخيرة. وهي الحالة التي نجدها عند خيول السباقات.

(6.2) تقييم الاستثمارات الرأسمالية

الاستثمار هو عملية تملك آلة إنتاج من قبل المؤسسة. ينطوي الاستثمار على تكلفة فورية تسدد بشكل كامل أو على مراحل تلحقها إيرادات مستقبلية تُسمى تدفقات نقدية. وكما شاهدنا في الفقرات المخصصة للاستهلاك أن الأصول الرأسمالية يمكن أن تكون لها قيمة نهائية تسمي خردة عند انتهاء مدة صلاحيتها.

يوجد عدة معايير نوردها في الفقرة التالية التي تمكن من المفاضلة بين استثمارين A و B: معيار صافي القيمة الحالية (NPV) ومعيار معدل العائد الداخلي (IRR) وكذلك مدة استرجاع الاستثمار.

الرموز:

V_0 : القيمة الأولية أو قيمة التملك.

V_n : القيمة النهائية أو قيمة الخردة.

C_k : التدفقات النقدية أو الإيرادات في السنة k حيث $k \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

i : معدل الخصم أو معدل تكلفة رأس المال.

(6.2.1) صافي القيمة الحالية

تعريف

صافي القيمة الحالية (NPV) هو الفارق بين القيم الحالية للتدفقات النقدية الداخلة والقيم الحالية للتدفقات النقدية الخارجة. ومن المهم أن نستوعب هذا المفهوم. يقول "La Palice" : "يصبح الاستثمار مفيدا إذا حصلنا على إيرادات تفوق المصروفات". هذه الحقيقة المفسرة بمصطلحات مالية نعبر عنها كالآتي: يكون

الاستثمار مفيدا إذا كانت إيراداته أعلى من مصاريفه بالقيمة الحالية". ورياضيا يعبر عنه كالتالي:

$$NPV = \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n} + \frac{V_n}{(1+i)^n} - V_0 \qquad (6.6)$$

أو:

$$NPV = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+i)^k} + \frac{V_n}{(1+i)^n} - V_0 \qquad (6.7)$$

ملاحظة: إذا كانت التدفقات النقدية ثابتة $(C_k = C)$ فهذا يعود بنا إلى قاعدة الدخل المؤكد في نهاية الفترة:

$$NPV = C_k a_{\overline{n|}} + \frac{V_n}{(1+i)^n} - V_0$$

يعتبر الاستثمار مربحا إذا كانت NPV موجبة. ومن وجهة نظر مالية بحتة، يستحق الاستثمار العمل به.

في حالة المفاضلة بين استثمارات متعددة، نختار الاستثمار ذا أعلى صافي قيمة حالية.

مثال رقم (1): ترغب مؤسسة في امتلاك آلة جديدة تقدر قيمتها بـ6000 *frs* وهو ما يمكن من خفض تكلفة الإنتاج بـ1000 *frs* سنويا لمدة خمس سنوات. نقدر قيمة هذه الآلة بعد خمس سنوات (الخردة) بـ3000 *frs*.

هل يجب شراء هذه الآلة إذا علمت أن هذا الاستثمار سوف يتم تمويله بقرض مالي نسبة فائدته تساوي 10%؟

الحل رقم (1):

بحساب "ص ق ح" (صافي القيمة الحالية) باعتبار $i = 0{,}1$ نجد:

$$NPV = 1'000a_{\overline{5|}} + 3'000v^5 - 6'000 = -346,4\ frs$$

ُص ق حُ هو عدد سالب لذلك لا توجد فائدة –حسب هذا المعيار– لشراء الآلة.

الحل رقم (2): استخدام إكسل

توجد في برنامج إكسل الدالة: $NPV\ (i; C_1; C_2; \ldots)$

يجب الانتباه عند استخدام هذه الدالة إلى كونها لا تأخذ في الاعتبار القيمة الأولية $_0$.

نكتب الدالة على النحو التالي:

	A	B	C	D
1	=-6000+NPV(0,1:1000:1000:1000:1000:4000)			
2				

مثال رقم (2): ترغب مؤسسة صيدلانية في تطوير دواء جديد. يمكنها أن تختار بين الإستراتيجيتين التاليتين:

(أ) استثمار مبلغ مليار فرنك (سويسري) وبيع الدواء مباشرة. في هذه الحالة تقدر الإيرادات في نهاية السنة الأولى بـ500 مليون *frs*، و400 مليون *frs* بعد سنتين و 300 مليون *frs* بعد ثلاث سنوات.

(ب) تطوير الدواء في مدة أطول وذلك باستثمار 200 مليون الآن و200 مليون بعد سنة ثم الحصول على 300 مليون في نهاية السنتين الثانية والثالثة.

ما هي الإستراتيجية المناسبة للشركة إذا كان بإمكانها الحصول على تمويل بنسبة فائدة 5% سنويا؟

الحل رقم (1):

بحساب ص ق ح (NPV) للمشروع a – باعتبار $i = 0{,}05$ و $V_0 =$ $-1'000$ $C_1 = 500$ $C_2 = 400$ $C_3 = 300$ نجد:

$$NPV_a = \frac{500}{1{,}05} + \frac{400}{(1{,}05)^2} + \frac{300}{(1{,}05)^3} - 1'000 = 98{,}15 \text{ مليون frs}$$

أما ص ق ح (NPV) للمشروع b –باعتبار $i = 0{,}05$ و $V_0 = 200 +$ $-\frac{200}{1{,}05}$ $C_1 = 200$ $C_2 = 300$ $C_3 = 300$ فهي تساوي:

$$\text{NPV}_b = \frac{300}{(1{,}05)^2} + \frac{300}{(1{,}05)^3} - 200 - \frac{200}{1{,}05} = 140{,}78 \text{ M frs}$$

حسب معيار صافي القيمة الحالية الإستراتيجية b تعتبر أكثر أهمية.

الحل رقم (2): استخدام إكسل

نكتب داخل إكسل القاعدة التالية:

	A	B	C
1	=-6000+NPV(0.05,-200,300,300)		
2			

والنتيجة هي: *NPV=140,78 M frs*

(6.2.2) معدل العائد الداخلي

تعريف

معدل العائد الداخلي هو نسبة التحديث التي تجعل صافي القيمة الحالية للمشروع مساوية للصفر. يجب إذاً إيجاد النسبة i التي تحقق المعادلة التالية:

$$V_0 = \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n} + \frac{V_n}{(1+i)^n} \quad (6.8)$$

أي:

$$V_0 = C_k a_{\overline{n|}} + \frac{V_n}{(1+i)^n} \quad (6.9)$$

ملاحظات:

- حل هذه المعادلة يمكن التوصل إليه باستخدام طريقة الاستيفاء التي تم عرضها في الفقرة 17.4.1 من هذا الكتاب أو باستخدام برنامج إكسل.
- هذه المعادلة من الدرجة n يمكن أن يكون لها حلول متعددة حسب قيم الحدود الأولية المختارة لحساب الجذور.
- إذا كان معدل العائد الداخلي للاستثمار أقل من نسبة الفائدة الموجودة في السوق المالية فإن من صالح المستثمر أن يستثمر أمواله في هذه السوق بدلا من هذا الاستثمار.
- للمفاضلة بين استثمارين نختار الاستثمار الذي يحقق أعلى معدل عائد داخلي.

مثال رقم (1): أوجد معدل العائد الداخلي لمشروع تقدر تدفقاته النقدية على النحو التالي:

السنة	0	1	2	3	4
التدفق النقدي	960–	950	1000	500–	500–

الحل رقم (1): طريقة الاستيفاء

لدينا القيم التالية:

$$C_4 = -500 \; V_0 = 960 \; C_1 = 950 \; C_2 = 1000 \; C_3 = -500$$

يجب حل المعادلة:

$$960 = \frac{950}{1+i} + \frac{1000}{(1+i)^2} - \frac{500}{(1+i)^3} - \frac{500}{(1+i)^4}$$

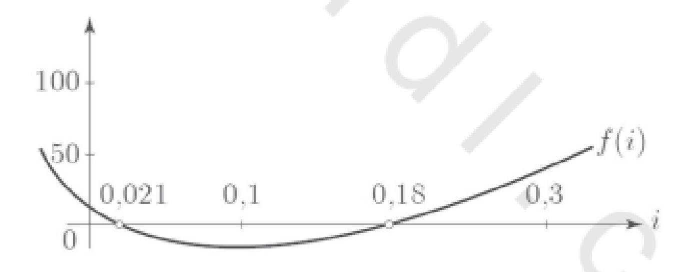
باستخدام طريق الاستيفاء التي تم شرحها في الفقرة 17.4.1 يتطلب حل هذه المعادلة حساب:

$$f(i) = 960 - \frac{950}{1+i} - \frac{1000}{(1+i)^2} + \frac{500}{(1+i)^3} + \frac{500}{(1+i)^4} = 0$$

حسب المجال الأول الذي تم تحديده، نحصل من خلال طريقة الاستيفاء على حلين مختلفين. حيث:

- داخل المجال [0,0.1] مثلا نحصل باستخدام هذه الطريقة على النتيجة: $i = 2.13\%$
- داخل المجال [0.1,0.5] مثلا نحصل باستخدام هذه الطريقة على النتيجة: $i = 18.4\%$

يمكن تفسير الغاية من النتيجتين الحاصلتين أعلاه من خلال الرسم البياني التالي. نلاحظ أن المعادلة $f(i) = 0$ لها جذران داخل المجال [0,0.5].



الحل رقم (2): استخدام إكسل

توجد في برنامج إكسل الدالة: $IRR\ (V_0, C_1, C_2, \ldots, C_n, [Guess])$ ، ثم نكتب القاعدة على النحو التالي باعتبار أن القيمة المقدرة تقترب من قيمة الجذر الأول 2.13%:

	A	B	C
1	-960		
2	950		
3	1000		=IRR(A1:A5,0.01)
4	-500		
5	-500		

والنتيجة تكون إذاً: $i = 2.13\%$.

الحل رقم (3): استخدام الآلة تي آي–83

باستخدام الآلة تي آي –83 تتطلب العملية استدعاء المعالج وإدخال الدالة التالية:

```
EQUATION SOLVER
eqn:0=960-950/(1
+X)-1000/(1+X)^2
+500/(1+X)^3+500
/(1+X)^4
```

نلاحظ أن الحل هو: $i = 2.13\%$ ويمكن إعادة تعريف حدود البحث بين 0,1 و0,3 مثلا وهو ما يعطي الحل الثاني: $i = 18.4\%$.

مثال رقم (2): تبلغ قيمة إحدى الآلات € 10000 ويمكن الحصول على تدفقات نقدية سنوية بـ € 1500 باستعمال هذه الآلة لمدة 14 سنة، تبلغ على إثرها قيمة الخردة لهذه الآلة صفر. احسب معدل العائد الداخلي لهذا الاستثمار.

الحل

نحسب المعدل i الذي يحقق:

$$NPV = 1'500a_{\overline{14|}} - 10'000 = 0$$

أي:

$$a_{\overline{14|}} = \frac{10{,}000}{1{,}500} = 6{,}666666$$

أو:

$$f(i) = \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{14}}{i} - 6{,}666666 = 0$$

استخدام إكسل

$$IRR(\left\{\begin{matrix} -10'000,1'500,1'500,1'500,1'500,1'500,1'500,1'500,1'500,1'500, \\ 1'500,1'500,1'500,1'500,1'500 \end{matrix}\right\})$$

الحل: 89, 11%

استخدام المعالج في الآلة تي آي-83

$$eqn: 0 = (1 - (1/(1+X))\hat{\ }14)/X - 6.666666$$ الحل 11.89%

ملاحظة: إذا كانت نسبة الفائدة في سوق المال أقل من 11.89% وجب شراء الآلة حسب هذا المعيار.

(6.2.3) فترة الاسترداد والاستهلاك:

تعرف فترة الاسترداد (p) على أنها الفترة اللازمة لتغطية الاستثمار الأولي من قبل مجموع التدفقات النقدية.

$$V_0 \leq C_1 + C_2 + \cdots + C_p \quad (6.10)$$

أي:

$$V_0 \leq \sum_{k=1}^{p} C_k \quad (6.11)$$

فترة الاستهلاك (q) تحسن بشكل ملحوظ النتيجة، حيث تأخذ في الاعتبار التدفقات النقدية المحدثة، وبالتالي فإننا نبحث عن أصغر عدد صحيح q يحقق:

$$V_0 \leq \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_q}{(1+i)^q} \quad (6.12)$$

أي:

$$V_0 \leq \sum_{k=1}^{q} \frac{C_k}{(1+i)^k} \quad (6.13)$$

عندما نقارن بين مشروعين فإن المشروع الذي يحقق أقل فترة استرداد هو المشروع المفضل.

مثال: المطلوب تحليل المشروعين التاليين من خلال أسلوب فترة الاسترداد وباستخدام نسبة تحديث (تكلفة رأس المال) 10%.

المبالغ	V_0	C_1	C_2	C_3	C_4
المشروع A	40	15	15	15	15
المشروع B	60	15	20	20	20

الحل

المشروع A: $C_1 < V_0, C_1 + C_2 = 30 < V_0, C_1 + C_2 + C_3 = 45 > V_0,$

إذاً يستلزم هذا المشروع ثلاث سنوات لاسترداد مبلغ الاستثمار.

المشروع B: $C_1 + C_2 = 35 < V_0, C_1 + C_2 + C_3 = 55 < V_0,$

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 75 > V_0$$

إذا يستلزم هذا المشروع أربع سنوات لاسترداد مبلغ الاستثمار.

حسب هذا المعيار فإن المشروع A يعد أفضل من المشروع B.

(6.2.4) مؤشر الربحية

إذا تطلب مشروعان مبالغ استثمارية مختلفة فيجب أن نأخذ ذلك في الاعتبار عند التحليل. يتمثل معيار مؤشر الربحية (π) في قياس القيمة الحالية للتدفقات النقدية لمشروع ما مقارنة بمبلغ الاستثمار الأولي V_0. وهذا يمكن من عمل مقارنة بين مشروعات مختلفة. المشروع المفضل هو الذي يحقق أعلى مؤشر ربحية. وهذا المؤشر نحسبه كالتالي:

$$\pi = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{(1+i)^k} + \frac{V_n}{(1+i)^n}}{V_0} \quad (6.14)$$

إذا استعملنا القاعدة 6,7 يمكن أن نستنتج:

$$\pi = \frac{NPV}{V_0} + 1 \quad (6.15)$$

مثال: باستخدام تكلفة رأس مال مساوية لـ 5%. احسب مؤشر الربحية للمشروعين التاليين:

المبالغ	V_0	C_1	C_2	C_3	V_3
المشروع A	50	20	20	20	0
المشروع B	80	30	30	30	0

الحل

المشروع A: $NPV = \frac{20}{1,05} + \frac{20}{(1,05)^2} + \frac{20}{(1,05)^3} - 50 = 4,46$

وبالتالي: $\pi_A = \frac{4,46}{50} + 1 = 1,089$

المشروع B: $NPV = \frac{30}{1,05} + \frac{30}{(1,05)^2} + \frac{30}{(1,05)^3} - 80 = 1,69$

وبالتالي: $\pi_A = \frac{1,69}{80} + 1 = 1,0211$

على أساس معيار مؤشر الربحية فقط يمكن القول إنه من الأفضل أن نختار المشروع A.

ملاحظة: دراسة المفاضلة بين المشروعات تتضمن في أغلب الأحيان استخدام أكثر من معيار في التحليل وكذلك معايير أخرى لم نتطرق إليها في هذا الكتاب.

(6.3) تمارين

1- أوجد جدول الاستهلاك لإحدى المعدات التي تبلغ قيمته 1500 € والمستهلك في مدة أربع سنوات والبالغة قيمة خردتها: 500 €. الطريقة: الاستهلاك المنتظم.

2- آلة قيمتها 3000 frs وجب استهلاكها كليا في مدة 5 سنوات. ما هو مقدار الاستهلاك الأخير المحقق باستخدام طريقة الاستهلاك العددي المتناقص.

3- بلغت قيمة شراء إحدى الآلات frs75000 ووجب استهلاكها كليا في مدة قدرها n باستخدام طريقة الاستهلاك العددي المتناقص. أوجد قيمة n علما بأن مقدار الاستهلاك الثالث يساوي 15000 frs.

4- أوجد جدول الاستهلاك لإحدى المعدات البالغ قيمتها 5000 € والتي سيتم استهلاكها في مدة 4 سنوات والمقدرة خردتها بـ 500 €. الطريقة: الاستهلاك الهندسي المتناقص.

5- إحدى المعدات بقيمة 40000 frs تفقد 80% من قيمتها في مدة 10سنوات. ما هو مقدار الاستهلاك الخامس مفترضا الآتي:

(أ) الاستهلاك المنتظم.

(ب) الاستهلاك العددي المتناقص.

(جـ) الاستهلاك الهندسي المتناقص.

6- إحدى المعدات بقيمة 20000 € تستهلك كليا في مدة 4 سنوات باستهلاكات نصف سنوية. ما هو مقدار الاستهلاك الخامس مفترضا الآتي:

(أ) الاستهلاك المنتظم.

(ب) الاستهلاك العددي المتناقص.

(جـ) الاستهلاك الهندسي المتناقص.

7- تتناقص قيمة أرض بنسبة 2.5% سنويا من قيمتها في بداية كل سنة.

(أ) أوجد قيمة الأرض بعد 30 سنة إذا كانت قد اشتريت بقيمة أولية تبلغ 300000 €.

(ب) ما مقدار الاستهلاك السنوي الثابت بعد 30 سنة الذي يؤدي إلى عدم تغير قيمة الأرض.

8- ■ إحدى طرق الاستهلاك تتمثل في تناقص المعدات سنويا بنسبة تساوي $A_k = \frac{2}{n}\,(1-\frac{2}{n})^{k-1}\ \forall k = 1,2,3,\dots,n$ من قيمتها الأولية.

(أ) إذاعلمت أن $n = 5$ أوجد $A_1, A_2, \dots, A_5$.

(ب) أثبت أن السلسلة في (أ) هي متوالية هندسية ثم أوجد مجموع الحدود الخمس الأولى لهذه المتوالية.

(جـ) إذا علمت أن القيمة الأولية للمستهلك تقدر بـ25000 € كم يبلغ الاستهلاك التراكمي بعد سنتين.

9- استثمار بقيمة 823000 frs أدى إلى إيرادات قدرت بـ500000 frs بعد سنتين و600000 frs بعد 4 سنوات. استخدم العمليات الجبرية فقط لإيجاد معدل العائد لهذا الاستثمار.

10- آلة تقدر قيمتها بـ75000 € تسجل سنويا فائض إيرادات يبلغ 12000 € لمدة 14 سنة يتم على إثرها استهلاك الآلة كليا دون أن تكون لها أي قيمة خردة. بفرضية تكلفة رأس مال تساوي 10% احسب صافي القيمة الحالية (NPV) ومعدل العائد الداخلي (IRR). ما هو تعليقك على النتائج.

11- احسب معدل العائد الداخلي لسلسلة المصروفات التالية:

الفترة	0	1	1,5	2	3
صافي التدفق	-5000 €	1500 €	1200 €	1300 €	2100 €

12- ليكن لدينا مشروعان A وB مدة كل منهما 3 سنوات بتكلفة 400000 frs وبمقدار خردة يساوي الصفر وقد بلغت التدفقات النقدية للمشروعين في آخر كل سنة:

السنة	المشروع A	المشروع B
1	frs 225000	frs 50000
2	frs 205000	frs 200000
3	frs 40000	frs 250000

(أ) قارن بين المشروعين باستخدام معيار صافي القيمة الحالية (7%) ومعدل العائد الداخلي. ماذا تستنتج؟

(ب) احسب مؤشر الربحية للمشروعين.

13- خريج جديد من معهد الإدارة العليا قدر تكاليف دراسته أثناء حصوله على الشهادة بمبلغ 28000 frs آخذا في الاعتبار زيادة مصاريفه وعدم حصوله على رواتب طيلة فترة دراسته. وقد قدر إيراداته المستقبلية السنوية الإضافية اعتمادا على مستوى تكوينه بـ:

(أ) 1000 frs سنويا زيادة عن راتبه الحالي ولفترة العشر سنوات القادمة.

(ب) 3000 frs سنويا زيادة عن راتبه الحالي ولفترة العشر سنوات القادمة.

(جـ) frs 6000 سنويا زيادة عن راتبه الحالي ولفترة العشرين سنة القادمة. هل كان اختيار الطالب صائبا عندما قرر التسجيل في معهد الإدارة العليا علما أنه قدر معدل عائده بنسبة لا تقل عن 5%؟

14- تفاوض لاعب كرة قدم أوروبي على عقد مدته 5 سنوات. عرض مستشاره المالي على الهيئة المديرة للنادي خيارين هما:
إما صرف 200000 € سنويا للاعب لمدة التعاقد البالغة 5 سنوات، وإما صرف 105000 € لمدة عشر سنوات وهو ما يوفر مزايا جبائية للاعب. إذا كان بإمكان النادي استثمار رأس المال بنسبة فائدة 10% فما العرض الذي وجب قبوله من النادي؟

15- من المنتظر أن يتم تاسيس نظام مخصص للمعالجة داخل مصنع بتكلفة إجمالية تقدر بـ10000 frs. ويقدر انخفاض التكاليف الذي يمكن أن يوفره هذا النظام بـ800 frs في السنة الأولى، 1000 frs في السنة الثانية و1500 frs سنويا لبقية السنوات. ما هو العدد الصحيح من السنوات اللازمة لهذا النظام لكي يبرر مبلغ الاستثمار الذي تطلبه؟ صاحب المصنع يرغب في تحقيق معدل عائد لا يقل عن 8% سنويا؟

16- ترغبون في شراء آلة بتكلفة 20000 € وبمدة صلاحية محتملة تقدر بـ15 عاما علما بأن قيمة الخردة تساوي صفر. وتكلف هذه الآلة سنويا 7000 € كمصروفات صيانة. عرضت الشركة المصنعة عليكم إمكانية استئجارها بدلاً من شراء الآلة، عرض عليكم استئجارها بمبلغ 1000 € لكل نصف سنة يدفع في نهاية الفترة النصف سنوية. في المقابل أنتم مطالبون بتقبل تكاليف العمالة والصيانة. ما هو الاختيار الأفضل لكم (الإيجار أم الشراء) وعلى أساس أي معيار؟

الباب الثاني

الرياضيات الاكتوارية

- الفصل السابع: الدوال البيومترية
- الفصل الثامن: جداول الوفاة
- الفصل التاسع: تأمين الدفعات الدورية
- الفصل العاشر: تأمينات رؤوس الأموال
- الفصل الحادي عشر: عدد التبديلات
- الفصل الثاني عشر: علاوات التأمين
- الفصل الثالث عشر: احتياطات رياضية

الفصل السابع

الدوال البيومترية

Fonctions Biomètriques

في هذا الفصل سوف يتم تعريف قواعد الاحتمالات الضرورية للقيام بالعمليات الأكتوارية، حيث إن الرياضيات الأكتوارية تجمع بين الرياضيات المالية وحساب الاحتمالات، فتسديد الالتزامات الناتجة عن استثمار رأس مال لم يعد مؤكدا كما هو الحال في الرياضيات المالية بل مرتبط ببقاء الشخص على قيد الحياة، كما أن المدة التي يتم أثناءها صرف دخل ليست مؤكدة فهي مرهونة بحياة أو وفاة المؤمن له، فالمستحقات تصبح متغيرات عشوائية والقيم الحالية تتحول إلى توقعات رياضية.

لمزيد من المعلومات حول الاحتمالات يمكن للقارئ الرجوع إلى نظريات الاحتمالات التي وقع التطرق إليها في الفصل السابع عشر.

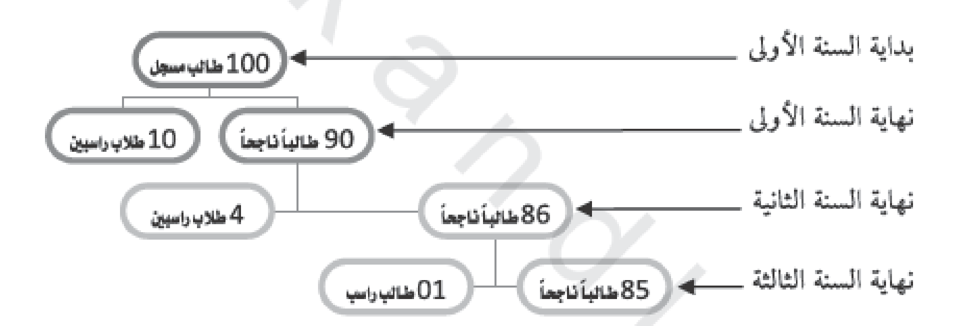
(7.1) احتمال الوفاة واحتمال البقاء على قيد الحياة

يمكن مقارنة الاحتمالات الرئيسية المستخدمة في العمليات الأكتوارية بالمثال التالي:

مثال: ليكن لدينا مدرسة مكونة من 100 طالب مسجلين في الصف الأول: هذه المؤسسة التعليمية التي لا تسمح بالرسوب في أي من فصولها، كانت قد سجلت خلال السنوات الدراسية الثلاث الماضية النتائج التالية:

- 10 طلاب رسبوا في السنة الأولى.
- 4 طلاب رسبوا في السنة الثانية.
- طالب واحد رسب في السنة الثالثة.

هذه الحالة يمكن عرضها على الشكل البياني التالي:

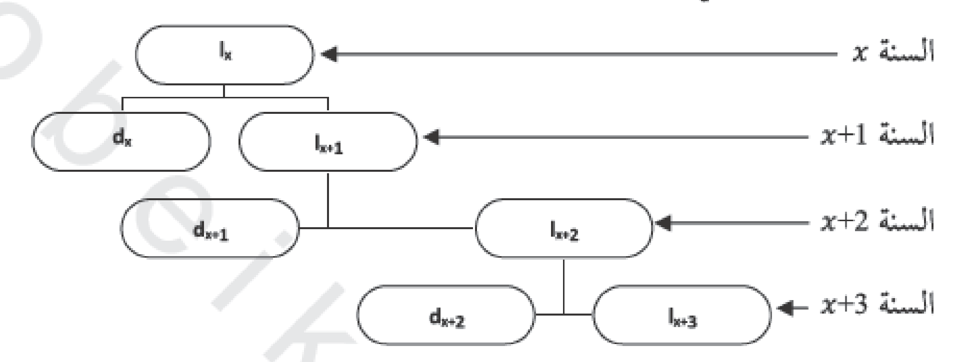


يمكن من خلال هذا الرسم إطلاق سلسلة من الاحتمالات:

- احتمال النجاح في السنة الأولى: $\frac{90}{100}$.
- احتمال الرسوب في السنة الأولى: $\frac{10}{100}$.
- احتمال النجاح في السنة الثانية لطالب مسجل في السنة الأولى: $\frac{86}{100}$.
- احتمال النجاح في السنة الثالثة لطالب مسجل في السنة الثانية: $\frac{85}{100}$.
- احتمال النجاح في السنة الثالثة لطالب مسجل في السنة الأولى: $\frac{85}{100}$.
- احتمال الرسوب في السنة الثالثة لطالب مسجل في السنة الأولى: $\frac{1}{100}$.
- احتمال الرسوب في السنوات الثلاث لطالب مسجل في السنة الأولى:

$\frac{15}{100} = \frac{100-85}{100} = \frac{10+4+1}{100}$.

يمكننا الآن تحويل نفس المثال أعلاه إلى العالم الأكتواري، ليصبح الرسم ذاته على النحو التالي:



وفي السياق ذاته للقالب (نجاح/رسوب) سوف نعد بعض الرموز والاحتمالات الأساسية للعمليات الأكتوارية.

الرموز:

x: سن رجل (و y سن امرأة).

l_x: عدد الأفراد الأحياء في سن x.

d_x: عدد الأفراد المتوفين بين السن x والسن $x + 1$.

القيم l_x وd_x تقرأ في جدول حياة (وفاة) الذي سنتطرق إليه في الفصل القادم.

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad (7.1)$$

باستخدام نفس التحليل السابق يمكن إيجاد الاحتمالات التالية:

p_x: احتمال بقاء شخص في السن x على قيد الحياة إلى حين بلوغه السن x+1 .

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \quad (7.2)$$

q_x: احتمال وفاة شخص (وهو في السن x) بين السن x والسن x+1 .

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x \quad (7.3)$$

$_2p_x$: احتمال بقاء شخص في السن x على قيد الحياة إلى حين بلوغه السن x+2.

$$_2p_x = p_x \times p_{x+1} = \frac{l_{x+1}}{l_x}\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} = \frac{l_{x+2}}{l_x}$$

$_np_x$: احتمال بقاء شخص في السن x على قيد الحياة إلى حين بلوغه السن x+n.

$$_np_x = p_x \times p_{x+1} \times \ldots = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (7.4)$$

$_{1|}q_x$: احتمال وفاة شخص (وهو في السن x) بين السن x+1 و السن x+2.

$$_{1|}q_x = p_x \times q_{x+1} = \frac{d_{x+1}}{l_x}$$

$_{n|}q_x$: احتمال وفاة شخص (وهو في السن x) بين السن x+n و السن x+n+1.

$$_{n|}q_x = {}_np_x \times q_{x+n} = \frac{d_{x+n}}{l_x} \qquad (7.5)$$

$_nq_x$: احتمال وفاة شخص (وهو في السن x) خلال الـ n سنوات القادمة.

$$_nq_x = 1 - {}_np_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \qquad (7.6)$$

مفاهيم تكميلية:

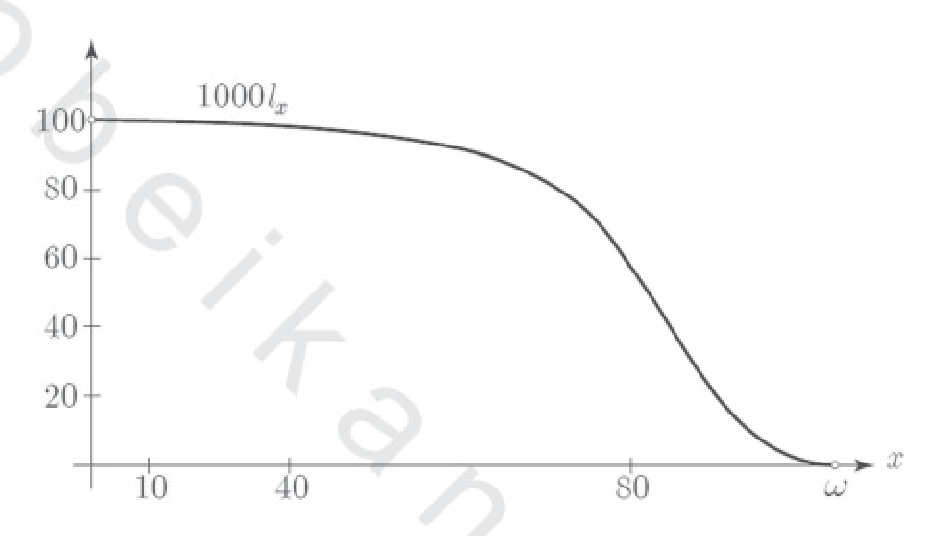
α: أصغر سن مشاهد في جدول الوفاة (انظر الفصل القادم) يقترن باحتمال وفاة غير صفري. في الغالب تبتدئ جداول الوفاة بعدد عشوائي $l_\alpha = 100'000$. كما تبدأ جداول المؤمن لهم بالأعداد $\alpha = 10$; أو 15 أو 20، بينما جداول التعداد السكاني تبدأ بـ: $\alpha = 0$.

ω: آخر سن في الجدول يمكن أن نجد فيه أحياء.

$$l_x = d_x + d_{x+1} + \cdots + d_\omega = \sum_{u=x}^{\omega} d_u \qquad (7.7)$$

$$l_{x+1} = l_x\,(1 - q_x) \qquad (7.8)$$

ملاحظة: الرسم البياني التالي يوضح أن سلسلة الأرقام $l_\omega ;...;l_1;_0$ تمثل سلسلة واحد لواحد تنازلية وتسمى **ترتيب الأحياء**.



مثال: استخدم جدول الوفاة المتواجد بالملحق لإيجاد الاحتمالات التالية:

(أ) احتمال أن يبقى رجل في سن 20 على قيد الحياة إلى حين بلوغه سن 60.

(ب) احتمال أن يتوفى رجل في سن 20 قبل بلوغه سن 60.

(جـ) احتمال أن يتوفى رجل في سن 20 عند بلوغه سن 60.

(د) احتمال أن يتوفى رجل في سن 20 عندما يتراوح سنه بين 60 و70.

الحل نحتاج إلى الأرقام التالية لإيجاد الحل $_{20} = 98'439$ ، $l_{60} =$ 86'312، $l_{70} = 71'040$، $d_{60} = l_{60} - l_{61} = 86312 - 85288$.

(أ) $_{40}p_{20}=\frac{l_{60}}{l_{20}} = \frac{86312}{98439} = 0.8768$.

(ب) $_{140}q_{20}=\frac{l_{20}-l_{60}}{l_{20}} = \frac{98439-86312}{98439} = 0.1232$.

وبالتالي فإن: $_{40}p_{20} + _{140}q_{20} = .8768+0.1232=10$.

(جـ) $_{40|1}q_{20} = \frac{d_{60}}{l_{20}} = \frac{1,024}{98,439} = 0.0104$.

(د) $_{40|10}q_{20} = {}_{20}p_{40} \times {}_{|10}q_{60} = \frac{l_{60} - l_{70}}{l_{20}} = \frac{86312 - 71040}{98439} = 0.1551$.

(7.2) توقع الحياة

ليكن لدينا رجل على قيد الحياة في عيد ميلاده رقمx . عدد السنوات المتبقية في حياته هو متغير عشوائي يمكننا احتساب التوقع الرياضي له (انظر الفقرة 17.3.3). إذا أهملنا الأجزاء من السنة فإن هذا التوقع يساوي:

$$e_x = 0 \times q_x + 1 \times {}_{1|1}q_x + 2 \times {}_{2|1}q_x + \cdots + (\omega - x) \times {}_{\omega-x|1}q_x$$

$$e_x = \frac{1}{l_x}\left(0 \times d_x + 1 \times d_{x+1} + 2 \times d_{x+2} + \cdots + (\omega - x) d_\omega\right)$$

ويمكن كتابة العبارة أيضا:

$$e_x = \frac{1}{l_x}\left(l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots + l_\omega\right)$$

كذلك يمكننا اختزال العبارة على النحو التالي (وهو ما يسمى **توقع الحياة المختزل**).

$$e_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\omega-x} l_{x+t} \qquad (7.9)$$

أما إذا بدأنا بالجمع انطلاقا من صفر فإننا نحصل على **توقع الحياة الكلي**:

$$\ddot{e}_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=0}^{\omega-x} l_{x+t} \qquad (7.10)$$

غالبية جداول الوفاة تعرف المتوسط بين توقع الحياة المختزل وتوقع الحياة الكلي وهو ما يعرف **متوسط توقع الحياة**:

$$\overset{o}{e}_x = \ddot{e}_x - 0.5 = e_x + 0.5 \qquad (7.11)$$

ملاحظة: المقادير p_x،q_x،l_x،d_x و $\overset{o}{e}_x$ تسمى القيم البيومترية. الجدول الذي يحتوى هذه القيم لجميع الأعمار يسمى جدول الوفاة. وهذا الجدول يمكن إعداده بسهولة حيث يكفي معرفة القيم x وكذلك القواعد (7.1) و (7.3) و (7.8) و (7.9).

معدلات توقع الحياة لبعض الدول:

البلد	الرجال	السيدات
اليابان	78	85
السويد	77	82
سويسرا	77	82
أستراليا	77	82
كندا	76	81
إيطاليا	76	82
أسبانيا	75	82
فرنسا	75	83
ألمانيا	74	81
الولايات المتحدة	74	79
يوغسلافيا	70	75
تونس	69	73
البرازيل	64	72
النيبال	58	58
نيجيريا	50	51
سيرا ليون	37	39

المصدر: تقرير الأمم المتحدة لسنة 2000.

(7.2.1) الاحتمالات على شخصين

ليكن لدينا x وy أعمار الشخصين (المؤمن لهما) في اللحظة التي بدأ فيها عقد التأمين نافذا. نتحدث عن انحلال الزوجين إذا حدثت الوفاة الأولى. الاحتمالات الرئيسية التي نعترضها لهذين الشخصين هي:

${}_np_{xy}$:احتمال أن يبقى الزوجان على قيد الحياة بعد n سنة.

$$ {}_np_{xy} = {}_np_x + {}_np_y = \frac{l_{x+n}}{l_x}\frac{l_{y+n}}{l_y} \quad (7.12)$$

${}_{|n}q_{xy}$:احتمال أن يتوفى أحد الزوجين خلال الـ n سنة القادمة.

$$ {}_{|n}q_{xy} = 1 - {}_np_{xy} = \frac{l_x l_y - l_{x+n}l_{y+n}}{l_x l_y} \quad (7.13)$$

${}_{n|}q_{xy}$:احتمال وفاة أحد الزوجين في السنة بعد nسنة.

$$ {}_{n|}q_{xy} = \frac{l_{x+n}l_{y+n} - l_{x+n+1}l_{y+n+1}}{l_x l_y} \quad (7.14)$$

ملاحظات:

الرموز التالية نجدها في بعض المؤلفات:

$$l_{xy}=l_x l_y \text{ و } d_{xy}=l_{xy} - l_{x+1:y+1} = l_x l_y - l_{x+1}l_{y+1}$$

عند حساب الاحتمالات للوفاة فى حالة الشخصين من الأفضل تعريف السن النهائي ω على الطريقة التالية:

$$\omega = \text{MIN}\,(\omega_x, \omega_y) \quad (7.15)$$

حيث ω_x: السن النهائي للشخص x.

وω_y: السن النهائي للشخص y.

مثال: تعاقد زوجان $x = 30$ و$y = 35$ مع مؤسسة تأمينية. العقد يقضي بدفع مبلغ 100000 ريال بعد عشر سنوات إذا كان أحد الزوجين أو الاثنين مع بعض ما زالا على قيد الحياة. أوجد هذا الاحتمال باستخدام جدول الوفاة الموجود في الملحق.

الحل

بالنظر إلى قاعدة اتحاد حادثين (أو قانون الجمع- راجع الفقرة (17.3.2).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P = \underbrace{{}_{10}P_{30}}_{M} + \underbrace{{}_{10}P_{35}}_{W} \quad - \underbrace{{}_{10}P_{30}}_{M} + \underbrace{{}_{10}P_{35}}_{W}$$

وهو ما يمكن كتابته على النحو التالي:

$$P = \frac{l_{40}}{l_{30}} + \frac{l_{45}}{l_{35}} - \frac{l_{40}}{l_{30}}\frac{l_{45}}{l_{35}} = \frac{95{,}257}{96{,}850} + \frac{97{,}181}{98{,}154} - \frac{95{,}257}{98{,}850} \times \frac{97{,}181}{98{,}154} = 0.99979$$

(7.3) تمارين

1- ما معنى الرمز: ${}_{8}P_{42}$ ؟

2- ما هو الرمز الذي يمكن استبداله بـ: $\frac{l_{65}-l_{75}}{l_{65}}$؟

3- دي موفر (عالم الرياضيات الفرنسي 1667-1754) كان قد أعد القاعدة التالية لحساب العبارة l_x :$l_x = -x + 86$. معرفا بذلك السن ω في عمر 85 سنة.

(أ) استخدم هذه القاعدة لحساب d_xو d_{x+t}. ماذا تستنتج؟

(ب) احسب التوقع المختزل للحياةe_x.

4- ■ أنت مطالب بتقدير التكلفة الحالية لتمويل جراية عمرية في الحين (جراية مدفوعة فوريا مادام المؤمن له على قيد الحياة) تقدر بـ00024' يورو سنويا لمؤمن له كبير في السن يبلغ اليوم 59 سنة. استخدم نسبة فائدة تساوي 4%

وجدول الوفاة الموجود في الملحق، كيف يمكنك تقدير هذه القيمة بافتراض أنك لا تعلم القواعد المتعلقة بحساب الجرايات العمرية (الفصل التاسع من هذا الكتاب).

5- احسب التوقع المختزل للحياة ومتوسط توقع الحياة لشخص عمره 90 سنة، من خلال المعطيات التالية:

l_x	x	l_x	x
5	95	21	90
3	96	15	91
1	97	12	92
0	98	9	93
--	--	7	94

6- اكتب القواعد ثم احسب الاحتمالات التالية باستخدام جدول الوفاة في الملحق:

(أ) احتمال أن يعيش رجل سنة أخرى وهو في سن العشرين.

(ب) احتمال أن تعيش امرأة إلى سن 62 وهي حاليا عمرها 30 سنة.

(ج) احتمال أن تتوفى امرأة قبل بلوغها سن 62 وهي حاليا عمرها 30 سنة.

(د) احتمال أن يعيش رجلان مدة عشر سنوات علما بأن الأول عمره 30 والثاني 40 سنة.

(هـ) احتمال وفاة أحد الرجلين خلال العشر سنوات القادمة علما بأن أعمارهما هي على التوالي 30 و40 سنة.

7- مؤسسة تأمينية لديها 660 عميل أعمارهم 35 سنة وينتظر أن يحصلوا جميعهم على رأس مال في حال بلوغهم سن 65 سنة. باستخدام جدول الوفاة في الملحق ما هو عدد المؤمن لهم الذين من المحتمل أن يحصلوا على المبلغ في سن 65 سنة؟

8- ينص عقد التأمين على الحياة لزوجين بأن يتم دفع مبلغ مالي للسيدة بركلاز (y= 35) أو السيد فاذر (x=37) في حال بقاء أحدهما على قيد الحياة بعد 20 سنة. احسب احتمال حدوث ذلك باستخدام جدول الوفاة الموجود في الملحق.

9- ما هو احتمال أن يتوفى رجل عمره 20 سنة عند بلوغه سن السبعين أو سن الثمانين؟ اكتب القاعدة فقط.

10- ■ جدول الوفاة البلجيكي (HS 68/72)تم تعديله باستخدام قاعدة ماكهام Makeham (خبير أكتواري إنكليزي (1827–1891) التالية:= p_x $sg^{e^x(e-1)}$ حيث المعاملات المدرجة في القاعدة تبلغ:

$$s = 0.999407846, g = 0.99953439, e = 1.105046035$$

(أ) أوجد باستخدام هذه القاعدة احتمال وفاة شخص بعد سنة وهو في سن 30؟

(ب) دائما حسب هذه القاعدة، ما هو عمر رجل يقدر احتمال بقائه على قيد الحياة بعد سنة 0.700685؟

11-■ التعريفة التجميعية السويسرية *GRM 80* وقع تعديلها للقيم $x \geq 58$ باستخدام قانون باركس *Perks* (أكتواري إنكليزي 1902–1970) التالي:

$$1000q_x = \frac{C_0 + C_1 C^{x-65}}{1 + C_2 C^{x-65}}$$

حيث قيم المعاملات هي:

$$C_0 = 3.159, C_1 = 13.4, C_2 = 0.018, C = 1.1169$$

(أ) حسب هذه القاعدة، ما هو احتمال وفاة رجل في سن الستين بعد سنة؟

(ب) دائما حسب نفس القاعدة، ما هو العمر الذي يبلغ عنده احتمال وفاة رجل بعد سنة 0.1678؟

12- استخدم القاعدة التالية: $l_x = 10'000\sqrt{100-x}$ حيث $0 \le x \le 100$، لإيجاد المقادير التالية:

(أ) ${}_{17}P_{19}$.

(ب) ${}_{15}q_{36}$.

(ج) ${}_{15|13}q_{36}$.

(د) $\overset{o}{e}_{36}$.

13- استخدم القاعدة: $l_x = 1'000\left(1-\frac{x}{120}\right)$، لإيجاد المقادير التالية:

(أ) l_0.

(ب) l_{120}.

(ج) d_{33}.

(د) ${}_{30}q_{20}$.

14- إذا كانت: $p_x = 0.95$ مهما كانت قيمة x، أوجد:

(أ) p_{20} . (ب) ${}_{2}q_{30}$.

15- استخدم القاعدة: $l_x = 100'000(2-0.007x-0.0007x^2)$ ، أكمل الجدول الآتي:

العمر x	l_x	d_x
0		
1		
2		
3		

16- أكمل الجدول الآتي:

العمر x	q_x	l_x	d_x
90	1/3	3000	
91	2/5		
92	1/2		
93	2/3		
94	4/5		
95	1		
96			

17- أكمل الجدول الآتي:

العمر x	l_x	d_x	p_x	q_x
0	'1000	100		
1				
2	750		.80	
3				
4	300			.60
5				
6	0			

18- ■ إليك قاعدة مواقر التالية: $l_x = 100 - x$

ليكن لدينا شخصين عمرهما على التوالي 90 و 95 سنة يتبعان جدول الوفاة المذكور. أوجد احتمال ألا يتوفى الشخصان في نفس السنة.

الفصل الثامن

جداول الوفاة

Tables de Mortalitè

تكمن أهمية جدول الوفاة في الدور الذي تمثله بالنسبة للمؤمن على الحياة في وضع القواعد اللازمة لحساب التسعيرة والعلاوة. لإعداد جدول للوفاة يجب قياس معدلات الوفاة. فإذا أردنا – إذن – أن نتعرف على معدلات الوفاة في مجتمع ما، فبالإمكان الاعتماد على آخر تعداد عام للسكان بالإضافة إلى دفاتر الحالة المدنية.الأرقام الأولية التي نحصل عليها من خلال هذا التقييم للوفاة ترسم الصورة الأولية لمعطيات قابلة للتغيير، لذلك فهي أرقام لابد من تعديلها باستخدام بعض الطرق الرياضية التي سنتطرق إليها لاحقا.

يتكون جدول الوفاة أساسا من الاحتمالات السنوية للوفاة المستخرجة مباشرة من المقاييس المعدلة للوفاة.

فإذا كان لدينا مثلا 1000 رجل في سن 43 سنة وتبين لنا بعد سنة أن 3 منهم قد توفوا قبل بلوغهم سن 44 سنة، فإن احتمال وفاة سنوية لرجل في سن 43 تساوي 0.003 أو 3 بالألف.

(8.1) جداول الوفيات

يبين جدول الوفيات تطور معدل الوفيات النظرية لمجموعة (مغلقة) من الأشخاص عبر الزمن والتي تستخلص من الوفيات الفعلية المشاهدة على مجموعة سكانية محددة. وتشير جداول الوفيات إلى جانب عدد الوفيات السنوي لكل سن إلى عدد الأشخاص الباقين على قيد الحياة، وبالتالي يتعين تسميتها جدول الحياة أيضا. عموما، هذه الجداول تتضمن قيما بيومترية أخرى، كاحتمال الحياة وعدد التبديلات... إلخ

(8.1.1) جداول الأجيال

لإعداد هذه الجداول لابد من تحديد مجموعة من الأشخاص مولودين في سنة محددة ومتابعتهم سنة تلو الأخرى وتسجيل كل الوفيات إلى حين انقراض كافة المجموعة. وهي طريقة سهلة نظريا لكنها شبه مستحيلة عمليا لأنها تتطلب متابعة حياة جيل كامل. بالإضافة إلى أن فترة المتابعة كبيرة بدرجة تجعل من النتائج بعد تجميعها لا تمثل الواقع.

(8.1.2) جداول السكان

لإيجاد معدلات الوفيات في جداول السكان ننطلق من منظمة جماعية معرفة من خلال توزيع أفرادها حسب السن في تاريخ التعداد، ثم نحسب عدد الوفيات في مختلف الأعمار التي نجدها في الإحصاءات العامة للسكان والتي تقابل متوسط عدد الوفيات المسجلة في سنة التعداد وعدد الوفيات في السنة التالية لها. كذلك يجب الأخذ في الاعتبار الزيادة أو النقص في عدد السكان الناتجة عن حركة الهجرة بين الدول لكي تكون النتائج مطابقة تماما للواقع.

(8.1.3) جداول المؤمن لهم أو الخبرة

هي جداول خاصة بشركات التأمين وتعتمد على المشاهدات المتعلقة بعملائهم أو تلك المتعلقة بعملاء شركات التأمين في الدولة بأكملها، أو لمجموعة

من الدول التي تسجل معدلات وفيات متشابهة. وتتمثل عملية إعداد الجدول في مشاهدة الأشخاص المعرضين للخطر وعدد الوفيات في كل سنة ولمختلف الأعمار، ويجب التمييز بين الجداول التالية:

- جداول مطبقة على أفراد لتأمينات الحياة.
- جداول مطبقة على أفراد لتأمينات الوفاة.

الجداول الأولى تحتوي على احتمالات وفيات أقل من تلك المسجلة في جداول السكان بينما تحتوى الجداول الثانية على احتمالات وفيات أعلى من تلك المسجلة في جداول السكان. وهذا التباين يفسره الاختيار الذي يحدده أصحاب المعاشات أو المؤمن لهم عند تعاقدهم مع مؤسسات التأمين. هذه الجداول تتضمن - إذن - هوامش للوفاة.

كما تحتوي الجداول الثانية على نوع آخر من الجداول: جداول التحديد، حيث تبين لمؤسسات التأمين أن الوفيات عند المؤمن لهم الذين قاموا بالفحص الطبي عند التعاقد هي الأقل في السنوات الأولى من الوفيات عند المؤمن لهم الذين تم إعفاؤهم من الفحص الطبي. وهو ما أدى بشركات التأمين إلى إنشاء "جداول محددة" تحتوي على احتمالات أساسها العمر وكذلك عدد السنوات السابقة للتأمين.

(8.1.4) الجداول المحتملة

تعتمد هذه الجداول على تطور معدلات الوفيات في المستقبل على عكس الجدول الكلاسيكي، فهي تمكن من حساب عقود المعاشات بمزيد من الدقة والأمان، حيث يتم إيجادها عبر تمديدها للتقييم المسجل في وفيات السكان العام. وهو ما يجنب المؤمن من اللجوء إلى زيادة رأس مال الاحتياطي بسبب شيخوخة

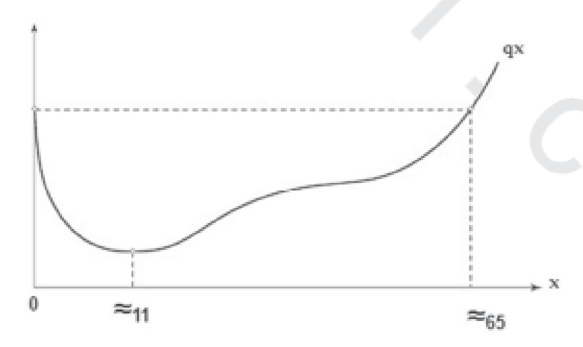
المجتمع. وتكمن الصعوبة في التعامل مع هذه الجداول في وجود جدول لكل سنة ميلاد للمؤمن لهم، كما تبقى هذه الجداول صالحة لسنة فقط. ولتسهيل عمل الأكتواريين في هذا المجال تم إنشاء جداول موحدة مستخرجة من الجداول المحتملة.

كمثال على ذلك في فرنسا حيث تم إنشاء جدول موحد (TPRV 93) ليأخذ مكان مجموعة من الجداول المحتملة. وهذا الجدول يمثل جدولا مكتملا لجيل 1950 حيث يقوم المؤمن بتعديله عبر تطبيق فارق عمري يحسب بحسب العمر الفعلي للمؤمن له.

(8.2) العوامل المؤثرة

(8.2.1) العمر

هو العامل الأكثر تأثيرا في حساب الاحتمالات السنوية للوفاة، فهو يقوم بالتالي بدور مهم في حساب التأمينات على الحياة، وتتغير الاحتمالات السنوية للوفاة حسب العمر بالطريقة التالية:



(8.2.2) الجنس

عموما معدلات الوفيات عند الإناث أقل من معدلات الوفيات عند الذكور وخاصة للأعمار القريبة من 20 سنة.

لفترات طويلة من الزمن تم اعتماد جدول للوفيات حسب الجنس. واعتبارا لمبدأ المساواة بين الجنسين (توجيهات الاتحاد الأوروبي) فإن الأمور تتجه شيئا فشيئا لاعتماد جدول موحد للجنسين.

(8.2.3) الزمن

الاحتمالات السنوية للوفاة في أيامنا هذه أصبحت أقل بكثير من مثيلاتها في بداية القرن الماضي، وهذا الأمر راجع أساسا إلى تطور الطب والنظافة والوقاية من الحوادث... إلخ. وسمي هذا الانخفاض بالتراجع القرني للوفيات. بمرور الزمن، أصبح التراجع ينعكس إيجابيا على توقعات الحياة. في سويسرا، مثلا ارتفعت توقعات الحياة من 50 سنة في بداية القرن الماضي إلى 80 سنة اليوم.

(8.2.4) أسباب أخرى

من الأسباب الأخرى نذكر تأثير المكان (بمعدلات وفيات أقل عادة عند بلدان الجزء الشمالي من الكرة الأرضية)، والحالة المدنية (بمعدلات وفيات أعلى عند المطلقين عادة) وأخيرا تأثير المهنة الذي دفع ببعض مؤسسات التأمين التي تقدم إليها عملاء ذوو مهن تكتسي بعض الخطورة إلى:

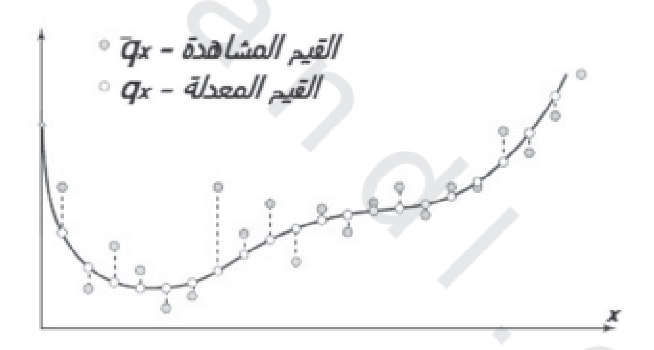
- رفض التعاقد (حالة قصوى).
- التعاقد مع إدراج بنود احترازية في العقد.
- التعاقد بشروط مالية عالية.

(8.3) طرق التعديل

(8.3.1) مقدمة

إذا قمنا بإدراج رسم بياني للاحتمالات السنوية للوفيات حسب العمر كما هي مشاهدة (الرسم المبين أسفل)، نستنتج أن منحنى القيم الأولية لهذه الوفيات ليس منتظما بل هو ينطوي على حركات فجائية ونترات. ويرجع ذلك

إلى العدد القليل للمشاهدات المتوفرة من ناحية وإلى مختلف الأسباب الأخرى التي تحدد التغييرات العشوائية للوفيات من ناحية أخرى (المكان، نمط الحياة، بيئة العمل ...إلخ). ورغم هذه التغييرات العشوائية فإن الوفيات، كمجموعة في حد ذاتها، تظهر اتجاها أساسيا واضحا، سبق الحديث عنه، وهذا الاتجاه يتضح أكثر عندما تكون مجموعات الأفراد المشاهدة لوفياتها ولبقائها على قيد الحياة أكبر وأكثر تجانسا. فإذا أردنا أن نعطي للوفيات صورة منصفة (وفية)، يتم من خلالها استبعاد الحوادث الراجعة للصدفة، فالمطلوب هو استخدام الطرق والوسائل المناسبة التي يمكن أن نعبر عنها نظريا بالتعديل أو التنعيم.



يجب أن تتضمن طرق التعديل شرطين أساسيين: التعديل يجب أن يكون له منحنى منضبط (تنعيم) دون وجود نقاط شاذة بعيدة جدا أو كثيرة، كذلك فإن القيم المعدلة يجب أن تضمن لفترة مشاهدة محددة صورة أمينة إلى أقصى حد ممكن للواقع (أمانة). يوجد طرق مختلفة للتعديل:

التعديل البياني

المشكلة تتمثل في إيجاد منحنى يكون أقرب ما يكون للأرقام الأولية التي تمثل سلسلة نقاط. تقرأ معدلات الوفاة بعد ذلك لكل عمر على هذا المنحنى.

التعديل الميكانيكي

القيم المعدلة تساوي المتوسط المرجح بعدد من المعدلات الإجمالية التي تسبق وتلحق مباشرة العمر. الطرق الأكثر استخداما وانتشارا هي طريقة Wittestein وطريقة Woolhouse وطريقة Karup

الرموز:

$\overline{q}_x$: إجمالي الاحتمال السنوي للوفاة.

q_x : الاحتمال السنوي المعدل للوفاة.

التعديل التحليلي

التعديل هنا يتم من خلال دالة تحليلية. نورد فيما يلي قاعدتين تحليليتين:

- قاعدة ماكهام Makeham.
- قاعدة المفاتيح بنقاط تقاطعية.

(8.3.2) قاعدة ماكهام Makeham

تكتب القاعدة على النحو التالي:

$$l_x = ks^x g^{e^x}$$

ولتعديلها (تنعيمها) نستخدم القاعدة:

$$q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - sg^{c^x\,(c-1)} \quad (8.1)$$

المطلوب هو إيجاد قيم المعاملات c,s,g. بينما المعلمة k هي قيمة ثابتة أولية في الجدول (مثلا k=100'000). يوجد أساسا طريقتان للحل: طريقة التكرار لنيوتن ورافسن (Newton-Raphson) وهي تتجاوز محتوى هذا الكتاب وطريقة كنج وهاردي (King-Hardy) السهلة والتي نورد فيما يلي طريقة استخدامها.

للتمكن من القيام بتعديل باستخدام هذه الطريقة يجب أن يتوفر عدد من الأرقام من أضعاف الرقم 3. نضع إذا:

$$t = \frac{x_n - x_1 + 1}{3}$$

حيث x_1 تمثل أول عمر مشاهد وx_n هي آخر عمر مشاهد. إذا عملنا أن $p_x = 1 - q_x$ يمكننا حساب القيم التالية داخل المجالات الثلاث:

$$\overline{S}_1 = \sum_{x=x_1}^{x_1+t-1} log\overline{p}_x \ ; \ \overline{S}_2 = \sum_{x=x_1+t}^{x_1+2t-1} log\overline{p}_x \ ; \overline{S}_3 = \sum_{x=x_1+2t}^{x_1+2t-1} log\overline{p}_x$$

نحسب بعد ذلك القيم المساعدة التالية:

$$a = \frac{\overline{S}_1\overline{S}_3 - \overline{S}_2^2}{t\ (\overline{S}_1 + \overline{S}_3 - 2\overline{S}_2\ )}; \ c = \sqrt[t]{\frac{\overline{S}_3 - \overline{S}_2}{\overline{S}_2 - \overline{S}_1}}; \ b = \frac{(c-1)\ (\overline{S}_2 - \overline{S}_1)}{c^{x_1}\ (c^t - 1)^2}$$

وأخيرا:

$$s = 10^a, \ g = 10^{\frac{b}{c-1}}$$

وهو ما يمكننا من إيجاد قاعدة ماكهام:

$$q_x = 1 - sg^{c^x\ (c-1)}$$

ملاحظة: دالة ماكهام هي دالة واحد لواحد، ذلك يعني أنها لا تستطيع أن تمثل سلاسل الأرقام الصحيحة المتزايدة أو سلاسل الأرقام الصحيحة المتناقصة.

مثال:

عدل إجمالي احتمالات الوفاة الستة التالية باستخدام قاعدة ماكهام:

i	x_i	$\overline{q}_{x_i}$	$\overline{p}_{x_i}$
1	20	.00410	.99590
2	21	.00440	.99560
3	22	.00520	.99480
4	23	.00580	.99420
5	24	.00610	.99390
6	25	.00630	.99370

الحل

$$x_1 = 20;\ x_n = 25;\ t = \frac{25-20+1}{3} = 2$$

نحسب بعد ذلك:

$$\overline{S}_1 = \sum_{x=20}^{21} log\overline{p}_x = -0.00369938$$

$$\overline{S}_2 = \sum_{x=22}^{23} log\overline{p}_x = -0.004790465$$

$$\overline{S}_3 = \sum_{x=24}^{25} log\overline{p}_x = -0.00540202$$

وهذا يمكننا من احتساب القيم المساعدة التالية:

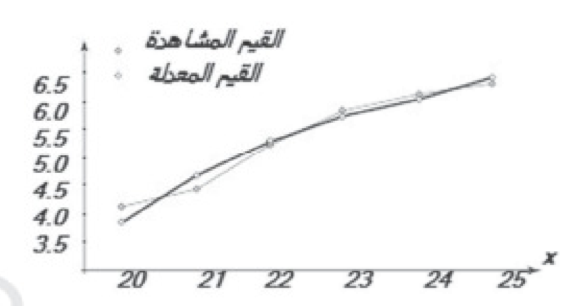
$$a = \frac{\overline{S}_1\overline{S}_3 - \overline{S}_2^2}{t\left(\overline{S}_1 + \overline{S}_3 - 2\overline{S}_2^2\right)} = -0.003090974$$

$$c = \sqrt{\frac{\overline{S}_3 - \overline{S}_2}{\overline{S}_2 - \overline{S}_1}} = 0.748666616$$

$$b = \frac{(c-1)\,(\overline{S}_2 - \overline{S}_1)}{c^{20}\,(c^2-1)^2} = 0.463900683$$

أي: $s = 10^a = 0.992908037$ و $g = 10^{\frac{b}{c-1}} = 0.014264012$ وهذه القيم نضعها في المعادلة: $q_x = 1 - sg^{\ x\,(c-1)}$.وهو ما يمكّن من احتساب القيم المعدلة التالية:

x	q_x
20	.003840
21	.004660
22	.005270
23	.005730
24	.006070
25	.006330



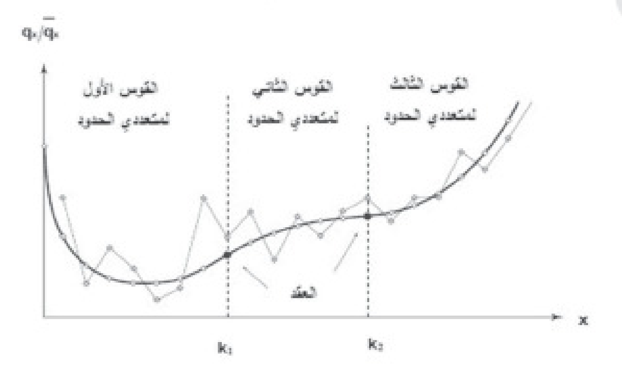
(8.3.3) طريقة المفاتيح بنقاط تقاطعية

تتطلب هذه الطريقة بعض المعلومات الرياضية المتعلقة بحساب المصفوفات. يمكن للقارئ مراجعة الفقرة 17.5 من هذا الكتاب حول المفاهيم الأساسية في حساب المصفوفات. تعتمد الطريقة على قاعدة صغرى المربعات، فهي بالتالي تعميم لطريقة الانحدار ولكنها مطبقة على متعددي الحدود بدرجات أعلى ومحددة بشروط (نقاط تقاطعية أو عقد).

وهذا يؤدي إلى وضع أقواس لمتعددي الحدود أو المفاتيح (من الدرجة الأولى أو الثانية أو حتى الثالثة) المترابطة ببعضها عبر الشروط الإضافية للعقد. وهذه الشروط هي:

اتصال متعددي الحدود ذوي الدرجات التي تزيد عن واحد: ميل وتقعر مماثل.

وهو ما يمكن تمثيله على النحو التالي:



للتسهيل سوف يتم اختيار أعداد صحيحة فقط لنقاط التقاطع $k_1 ; k_2 ; k_3 ; \cdots$.

الرموز:

n: عدد المشاهدات.

d: درجة الأقواس(d =1 أو2 أو 3 في الغالب).

z: عدد النقاط التقاطعية (3 أو 4 كأقصى حد).

إذا عرفنا z على أنه عدد النقاط التقاطعية أي يوجد لدينا $z+1$ مجال، يمكننا تعريف $z+1$ معادلة لكل مجال على النحو التالي:

$$q_x^{(i)} = q_x^{(0)} + \sum_{i=1}^{z} c_{d+i+1} (x - k_i)^d \qquad (8.2)$$

معادلة الأقواس للمجال الأول يمكن تحريرها كما يلي:

$$q_x^{(i)} = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_{d+1} x^d = \sum_{i=0}^{d} c_{i+1} x^i$$

المعامل c_1 ،c_2،c_3،...نجدها باستخدام المعادلة التالية:

$$C = (A^T A)^{-1} A^T Q \qquad (8.3)$$

$$Q_{n,1} = \begin{pmatrix} \overline{q}_{x_1} \\ \overline{q}_{x_2} \\ \vdots \\ \overline{q}_{x_n} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad C_{d+z+1,1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{d+z+1} \end{pmatrix}$$

المصفوفة $A_{n,d+z+1}$ تكتب كالآتي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^d & (x_1 - k_1)_+^d & (x_1 - k_2)_+^d & \cdots & (x_1 - k_z)_+^d \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^d & (x_2 - k_1)_+^d & (x_2 - k_2)_+^d & \cdots & (x_2 - k_z)_+^d \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^d & (x_3 - k_1)_+^d & (x_3 - k_2)_+^d & \cdots & (x_3 - k_z)_+^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^d & (x_n - k_1)_+^d & (x_n - k_2)_+^d & \cdots & (x_n - k_z)_+^d \end{pmatrix}$$

حيث:

$$(x_i - x_j)_+^d = \begin{cases} (x_i - x_j)^d & \text{إذا} \quad x_i - x_j > 0 \\ 0 & \text{إذا} \quad x_i - x_j \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة:

- إذا كانت $d = 1, z = 0$ فذلك ينتج انحدار خطي.
- إذا كانت $d = 2, z = 0$ فذلك ينتج انحدار تربيعي.

مثال: نريد تنعيم 5 قيم إجمالية عشوائية باستخدام طريقة المفاتيح الخطية تحتوي على نقطة تقاطع في $x = 6$. ليكن لدينا الجدول التالي:

i	x	$\overline{q}_x$
1	3	2
2	4	6
3	6	3
4	8	4
5	10	7

لدينا المعطيات التالية: $n = 5, d = 1$ (أقواس خطية) و$z = 1$ (نقطة تقاطع واحدة عند $x = 6$).

القيم المعدلة تظهر في متعددي الحدود التالية:

$$q_x = \begin{cases} q_x^{(0)} & x \leq 6 \\ q_x^{(1)} & x > 6 \end{cases}$$

تكتب المعادلة لكل مجال على النحو التالي:

$$q_x^{(0)} = c_1 + c_2 x; \;\; q_x^{(1)} = c_1 + c_2 x + c_3 (x - 6)$$

نستخدم المعادلة التالية لإيجاد المعامل c_1, c_2, c_3:

$$C = (A^T A)^{-1} A^T Q$$

وبذلك نحصل على:

$$\overline{Q}_{5,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, A_{5,3} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1 - k_1)_+ \\ 1 & x_2 & (x_2 - k_1)_+ \\ 1 & x_3 & (x_3 - k_1)_+ \\ 1 & x_4 & (x_4 - k_1)_+ \\ 1 & x_5 & (x_5 - k_1)_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \\ 1 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

وأخيرا إذا استخدمنا القاعدة (8.3) نجد:

$$C_{3,1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3.03 \\ 0.11 \\ 0.57 \end{pmatrix}$$

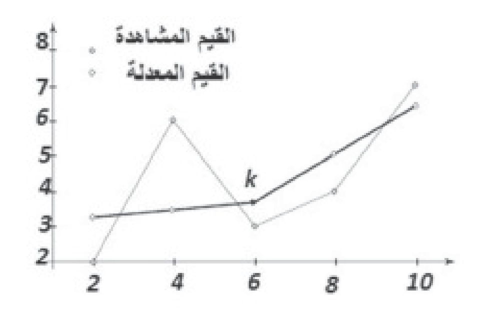
وبذلك تكتب المعادلات النهائية على النحو التالي:

$x \leq 6$ عندما $q_x^{(0)} = 3.03 + 0.11x$

$x > 6$ عندما $q_x^{(1)} = 3{,}03 + 0.11x + 0.57\,(x - 6)$

وبالتالي فإن القيم المعدلة سوف تصبح كالآتي:

i	x	$\overline{q}_x$	q_x
1	2	2	.253
2	4	6	.473
3	6	3	.693
4	8	4	.055
5	10	7	.416



(8.3.4) طريقة المتوسطات المتحركة

الأسلوب بشكل عام: نقوم بتجميع عدد فردي من المشاهدات (3 كحد أدنى) من خلال مجموعة من المشاهدات. احتمال الوفاةq_x يمكن صياغته في صورة القيم الإجمالية المتتالية وعددها k+12 التالية: $q_{x-k}, q_{x-k+1}, \dots, q_x, \dots, q_{x+k}$ اكتب المعادلة هنا.

بشكل عام نكتب:

$$q_x = \alpha(-k)\bar{q}_{x-k} + \alpha(-k+1)\bar{q}_{x-k+1} + \dots + \alpha\,(k)\bar{q}_{x+k}$$

حيث: $\alpha(-k) + \dots + \alpha(k) = 1$ و$\alpha(-k) = \alpha\,(k)$

فيما يلي القاعدتان المستخرجتان من طريقة المتوسطات المتحركة والمستخدمتان في الرياضيات الأكتوارية:

قاعدة ويتستاين Wittstein

يتم التعديل من خلال هذه القاعدة على 5 قيم متتالية$(k = 2)$

$$q_x = 0.2\bar{q}_{x-2} + 0.2\bar{q}_{x-1} + 0.2\bar{q}_x + 0.2\bar{q}_{x+1} + 0.2\bar{q}_{x+2} \qquad (8.4)$$

قاعدة كاروب Karup

يتم التعديل من خلال هذه القاعدة على 19 قيمة متتالية$(k = 19)$

$$\begin{aligned} q_x = & -0.0032\overline{q}_{x-9} - 0.0096\overline{q}_{x-8} - 0.0144\overline{q}_{x-7} 0.0128\overline{q}_{x-6} \\ & +0.0336\overline{q}_{x-4} + 0.0848\overline{q}_{x-3} + 0.1392\overline{q}_{x-2} + 0.1824\overline{q}_{x-1} \\ & +0.2\overline{q}_x \\ & +0.1824\overline{q}_{x+1} + 0.1392\overline{q}_{x+2} + 0.0848\overline{q}_{x+3} + 0.0336\overline{q}_{x+4} \\ & -0.0128\overline{q}_{x+6} - 0.0144\overline{q}_{x+7} - 0.0096\overline{q}_{x+8} - 0.0032\overline{q}_{x+9} \end{aligned} \qquad (8.5)$$

ملاحظة: تمتاز الطرق الميكانيكية بسهولتها، حيث إنه يمكن تصميمها داخل جدول وهذا ينطبق كليا على هذه الطريقة ولكن مساوئها تتمثل في الآتي:

- بصفتها متوسط مرجح فهي تقلل من أثر التغييرات الأساسية للدالة x .
- عدم قدرتها على تعديل القيم الشاذة في الجدول.

مثال: قم بتنعيم الاحتمالات الإجمالية للوفاة التالية باستخدام قاعدة Wittstein:

x	$\overline{q}_x$
1	2
2	4
3	6
4	3
5	8
6	6
7	9
8	8
9	10
10	8

الحل: باستخدام القاعدة نحصل على:

$$q_3 = 0.2\overline{q}_1 + 0.2\overline{q}_2 + 0.2\overline{q}_3 + 0.2\overline{q}_4 + 0.2\overline{q}_5 = 4.6$$

$$q_4 = 0.2\overline{q}_2 + 0.2\overline{q}_3 + 0.2\overline{q}_4 + 0.2\overline{q}_5 + 0.2\overline{q}_6 = 5.4$$

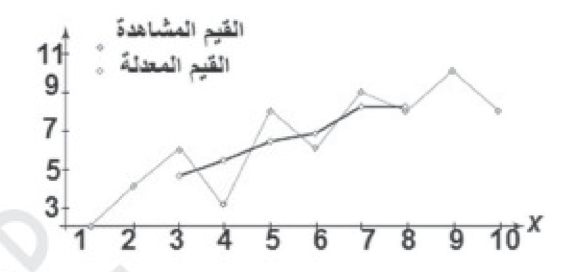
$$q_5 = 0.2\overline{q}_3 + 0.2\overline{q}_4 + 0.2\overline{q}_5 + 0.2\overline{q}_6 + 0.2\overline{q}_7 = 6.4$$

$$q_6 = 0.2\overline{q}_4 + 0.2\overline{q}_5 + 0.2\overline{q}_6 + 0.2\overline{q}_7 + 0.2\overline{q}_8 = 6.8$$

$$q_7 = 0.2\overline{q}_5 + 0.2\overline{q}_6 + 0.2\overline{q}_7 + 0.2\overline{q}_8 + 0.2\overline{q}_9 = 8.2$$

$$q_8 = 0.2\overline{q}_6 + 0.2\overline{q}_7 + 0.2\overline{q}_8 + 0.2\overline{q}_9 + 0.2\overline{q}_{10} = 8.2$$

وهو ما يمكننا تمثيله من خلال الرسم البياني الآتي:



(8.4) تمارين

1- قم بتعديل القيم المشاهدة التالية باستخدام قاعدة ماكهام Makeham ثم حمل النتائج على رسم بياني:

i	المشاهدة	المعدلة
1	2	
2	6	
3	5	
4	4	
5	9	
6	10	

2- قم بتعديل القيم المشاهدة التالية باستخدام قاعدة ماكهام Makeham ثم حمل النتائج على رسم بياني:

i	المشاهدة	المعدلة
1	2	
2	6	
3	5	
4	4	
5	9	
6	4	
7	8	
8	6	
9	12	

3- ■ إذا علمت أن $_{30} = 0.998, p_{45} = 0.994, p_{60} = 0.977$ ، استخدم قاعدة ماكهام Makeham لإيجاد قيم المعلمات: s, g, c.

4- قم بتعديل القيم المشاهدة الثلاثة التالية باستخدام قاعدة ماكهام Makeham ثم حمل النتائج على رسم بياني:

x_i	$f(x_i)$
1	4
2	2
3	7

5- تطورت أرباح إحدى الشركات خلال السنوات التسع الأخيرة على النحو التالي (بملايين يورو):

السنة	1996	1997	1998	1999	2000
الأرباح	2	5	2	5	3

السنة	2001	2002	2003	2004
الأرباح	9	12	10	18

(أ) أوجد التعديل الخطي دون استخدام نقاط التقاطع.

(ب) مثل القيم المشاهدة والمعدلة داخل رسم بياني.

(جـ) حسب هذه الطريقة ما هو الربح المنتظر خلال سنة 2005.

6- (نفس معطيات السؤال رقم 5). في تحليل معمق لنتائج الشركة تبين أن تطور الأرباح خلال الخمس سنوات الأولى كان بطيئا، بينما سجلت الشركة سرعة في الأرباح خلال السنوات التي تليها. وهو ما يؤدي إلى القيام بتعديل خطي مع وجود نقطة تقاطع عند سنة 2000.

(أ) اعتمادا على هذه الطريقة، مثل القيم المشاهدة والمعدلة داخل رسم بياني.

(ب) ما هو الربح المنتظر حسب هذه الطريقة دائما؟

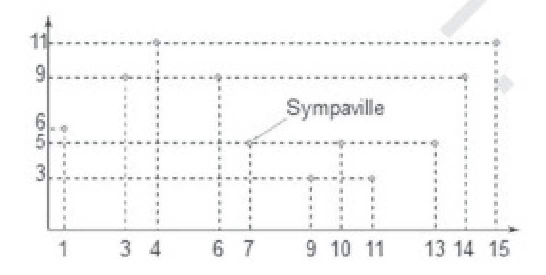
7- (نفس معطيات السؤال رقم 5). تقرر في الأخير تعديل جميع القيم باستخدام طريقة الانحدار التربيعي بدون نقاط تقاطعية:

(أ) اعتمد هذه الطريقة، لتمثل القيم المشاهدة والمعدلة داخل رسم بياني.

(ب) ما هو الربح المنتظر حسب هذه الطريقة دائما؟

8- يتوقع من الطريق السريعة المزمع إنشاؤها أن تمر بجانب المدن المبينة في الرسم البياني أدناه. يجب أن يكون مسار الطريق السريعة مضبوطا، من أجل ذلك تم الاعتماد على نموذج التعديل التربيعي مع نقطة تقاطعية في 'سيمبا فيل Sympaville'. الأرقام محسوبة بالكيلو متر.

مثل القيم المعدلة بيانيا:



الفصل التاسع

تأمين الدفعات الدورية

Assurances de Rentes

تناولنا في الفصل الرابع من هذا الكتاب دراسة الدفعات الدورية التي لم تعد تسدد بصفة مؤكدة، وفي هذا الفصل سوف نتناول بالدراسة الدفعات الدورية التي لم تعد تسدد على مدى الحياة. القيمة الحالية لدخل عمري أو مؤكد تقابل العلاوة الوحيدة (PU) وهو الثمن المطلوب دفعه للتمتع بهذا الدخل. في الرياضيات، يمكن اعتبار العلاوة الوحيدة (PU) على أنها توقعا رياضيا (انظر الفقرة (17.3.3)). كل ما يتغير هنا هو أن يتم ضرب كل عبارة في قاعدة الدخل باحتمال تسديدها.

مثال رقم (1): تعهدت شركة تأمين بصرف مبلغ 50000 فرنك سويسري إلى عميل في صورة بقائه على قيد الحياة خلال عشر سنوات، بالرجوع إلى جداول الوفاة المرفقة في الملاحق، ما العلاوة الوحيدة (PU) التي يجب على العميل دفعها إذا استعملنا نسبة فائدة تساوي 3%؟

الحل

احتمال البقاء على قيد الحياة إلى سن الخمسين لرجل عمره 40 سنة هو:

$$_{10}p_{40} = \frac{l_{50}}{l_{40}} = \frac{92659}{95257} = 0.972726$$

القيمة الحالية لاستثمار قدره 50000 فرنك سويسري (frs) يدفع بعد عشر سنوات هي:

$$50000\,\frac{1}{(1.03)^{10}} = 37204.70\,frs$$

بتركيب احتمال البقاء على قيد الحياة مع القيمة الحالية، نستطيع تعريف العلاوة الوحيدة للخدمة المقدمة على أنها:

$$PU = 37204{,}70 \times 0{,}972726 = 36189.98\,frs$$

بالحصول على هذا المبلغ يمكن للمؤمن أن يستثمره لمدة عشر سنوات بنسبة فائدة لا تقل عن 3%. إذا بقي المؤمن له على قيد الحياة بعد عشر سنوات فإنه سيكسب "المباراة"، وفي حال حدوث عكس ذلك فإن المؤمن هو الذي سيكسب، وبطبيعة الحال في الواقع فإن المؤمن ليس لديه عميل واحد بل مجموعة من العملاء. وبذلك يكون المؤمن قد وازن مخاطره وفي المعدل لا المؤمن ولا المؤمن له يمكنه أن يكسب "المباراة".

مثال رقم (2): نرغب في صرف "دخل ما بعد العد" بقيمة 10000 يورو لرجل عمره 40 سنة وذلك لفترة 3 سنوات. احسب العلاوة المطلوبة في كل حالة من الحالات الآتية:

لا يأخذ بالفائدة ولا بالوفيات في العمليات الحسابية.

الفائدة فقط هي التي يقع إدراجها في العمليات الحسابية.

الفائدة والوفيات يقع إدراجها في العمليات الحسابية.

الحل

$$PU = 1'000 + 1'000 + 1'000 = 1'000 \times 3$$

$$PU = 1'000v + 1'000v^2 + 1'000v^3 = 1'000 \times a_{\overline{3|}}$$

$$PU = 1'000v\frac{l_{41}}{l_{40}} + 1'000v^2\frac{l_{42}}{l_{40}} + 1'000v^3\frac{l_{43}}{l_{40}} = 1'000 \times \ddot{a}_{40:3}$$

(9.1) تركيبات كلاسيكية

(9.1.1) دخل عمري فوري

رموز:

$\ddot{a}_x$: القيمة الحالية (PU) للدخل العمري الوحدة تدفع مسبقا ('ما قبل العد' preanumerando) إلى حين وفاة المؤمن له.

a_x : القيمة الحالية (PU) للدخل العمري الوحدة تدفع مؤخرا ('ما بعد العد' postnumerando) إلى حين وفاة المؤمن له.

w : آخر قيمة في جدول الوفاة.

الدخل المسبق ('ما قبل العد' preanumerando)

$$\ddot{a}_x = 1 + v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{w-x}\frac{l_w}{l_x} = \sum_{t=0}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \quad (9.1)$$

الدخل المؤخر ('ما بعد العد' postnumerando)

$$a_x = v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{w-x}\frac{l_w}{l_x} = \sum_{t=1}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \quad (9.2)$$

العلاقة تربط بين $\ddot{a}$ و a_x :

$$a_x = \ddot{a}_x - 1 \quad (9.3)$$

ملاحظة: على عكس الدخل المؤكد فإن الدخل العمري (المعاش) لا توجد له قواعد سهلة تمكّن من احتسابه سريعا. وهو ما يدفع إلى استخدام الجداول الإلكترونية أو البرمجة لنتمكن من حساب سريع للقيم الحالية للخدمات العمرية.

قبل دخول الحواسيب في العمليات الحسابية، كان لا بد من تصميم جداول مساعدة سميت بـ"عدد التبديلات" لكي تسمح بحساب مبسط للمداخيل العمرية. سوف نستعرض ذلك في الفصل الحادي عشر.

(9.1.2) الدخل العمري المؤجل

الرموز:

$_{k|}\ddot{a}_x$: القيمة الحالية (PU) لدخل عمري "وحدة" مؤجل بعدد k من السنوات ومدفوع "ما قبل العد" إلى حين وفاة المؤمن له.

$_{k|}a_x$: القيمة الحالية (PU) لدخل عمري "وحدة" مؤجل بعدد k من السنوات ومدفوع "ما بعد العد" إلى حين وفاة المؤمن له.

المداخيل العمرية المؤجلة تمثل أكثر عقود المعاشات استخداما؛ حيث يدفع المؤمن له علاوة وحيدة في مقابل حصوله على دخل عمري إذا بقي على قيد الحياة في سن معينة (عند بلوغه سن التقاعد مثلا).

الدخل المسبق (ما قبل العد» « preanumerando)

$$_{k|}\ddot{a}_x = v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} + v^{k+1} \frac{l_{x+k+1}}{l_x} + \ldots + v^{w-x} \frac{l_w}{l_x} = \sum_{t=k}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad (9.4)$$

الدخل المؤخر (ما بعد العد« postnumerando»)

$$_{k|}a_x = v^{k+1} \frac{l_{x+k+1}}{l_x} + v^{k+2} \frac{l_{x+k+2}}{l_x} + \cdots + v^{w-x} \frac{l_w}{l_x} = \sum_{t=k+1}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad (9.5)$$

(9.1.3) الدخل العمري المؤقت

الدخل العمري المؤقت يتمثل في دفع أقسام الرواتب للمؤمن له، ما دام على قيد الحياة وذلك لمدة أقصاها n سنة.

وهذا الدخل يستفاد منه في حساب العلاوات بالقيمة الحالية الذي سنستعرضه في الفصل الثاني عشر. حيث إن الدخل العمري للمؤمن له يصرف عادة ما دام هذا الأخير على قيد الحياة ولكن ذلك محدد بعدد أقصى من السنوات يساويn .

الرموز:

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ القيمة الحالية (PU)لدخل عمري وحدة مدفوع مسبقا (في بداية الفترة) ما دام المؤمن له على قيد الحياة ولمدة قصوى قدرها n سنة.

$a_{x:\overline{n}|}$ القيمة الحالية (PU) لدخل عمري وحدة مدفوع مؤخرا (في نهاية الفترة) ما دام المؤمن له على قيد الحياة ولمدة قصوى قدرها n سنة.

القواعد التالية يتم إنشاؤها قياسا على القواعد المبينة أعلاه:

الدخل المسبق (ما قبل العدّ preanumerando)

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{n-1}\frac{l_{x+n-1}}{l_x} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \tag{9.6}$$

الدخل المؤخر (ما بعد العدّ« postnumerando»)

$$a_{x:\overline{n}|} = v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{n}\frac{l_{x+n}}{l_x} = \sum_{t=1}^{n} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \tag{9.7}$$

مثال:حددت العلاوات السنوية لأحد العملاء الذي يبلغ 25 سنة من عمره بـ € 1500 تدفع كلها مسبقا طالما بقي العميل على قيد الحياة وحتى بلوغه 65 سنة من عمره. احسب القيمة الحالية لتلك العلاوات.

الحل

القيمة الحالية (PV) تحسب من خلال القاعدة التالية:

$$VA = 1500\ddot{a}_{25:\overline{65-25|}} = 1000\ddot{a}_{25:\overline{40|}}$$

(9.1.4) الدخل العمري المؤجل والمؤقت

الدخل العمري والمؤقت يتمثل في صرف راتب إنزال شهري مؤجل طالما المؤمن له على قيد الحياة ولمدة أقصاها n سنة، وهذا الراتب يصرف بعد عدد k من الفترات تسمى الفترات المؤجلة.

الرموز:

${}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$: القيمة الحالية (أو PU) لدخل عمري وحدة ومؤجل بعدد k من السنوات ومدفوع مسبقا قبل العد (preanumerando) طالما أن المؤمن له باق على قيد الحياة وذلك لمدة أقصاها n سنة.

${}_{k|}a_{x:\overline{n|}}$: القيمة الحالية (أو PU) لدخل عمري وحدة ومؤجل بعدد k من السنوات ومدفوع مؤخرا بعد العد (postnumerando) طالما المؤمن له باق على قيد الحياة وذلك لمدة أقصاها n سنة.

قياسا بالقواعد المبينة أعلاه نورد فيما يلي القواعد المناسبة بشكلها المختزل:

الدخل المسبق ("ما قبل العد" preanumerando)

$$ {}_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=k}^{k+n-1} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad (9.8)$$

الدخل المؤخر ("ما بعد العد" postnumerando)

$$ {}_{k|}a_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=k+1}^{k+n} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad (9.9)$$

(9.1.5) الدخل العمري للاستمرار في الحياة:

في هذه الحالة يتم دمج الدخل المؤكد مع الدخل العمري.

$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$:القيمة الحالية (أو PU) لدخل ُالاستمرار في الحياةْ الوحدة ومدفوع مسبقا قبل العد (preanumerando) إثر وفاة المؤمن له وذلك خلال المدة المتبقية في العقد.

$a_{x:\overline{n|}}$: القيمة الحالية (أو PU) لدخل ُالاستمرار في الحياةْ الوحدة ومدفوع مؤخرا بعد العد (postnumerando)إثر وفاة المؤمن له وذلك خلال المدة المتبقية في العقد.

الدخل المسبق (ُما قبل العدْ preanumerando)

$$\ddot{a}_{x|\overline{n|}} = \ddot{a}_{\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} \quad (9.10)$$

الدخل المؤخر (ُما بعد العدْ postnumerando)

$$a_{x|\overline{n|}} = a_{\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}} \quad (9.11)$$

مثال: تقدّم مؤمن له بطلب قرض مشفوع برهن إلى إحدى البنوك وتعهد بتسديد مبلغ القرض خلال فترة 20 سنة بحساب €15000 في السنة.في حالة الوفاة يرغب المؤمن له أن تدفع شركة التأمين عنه المبلغ المذكور. احسب العلاوة الوحيدة لهذا العقد؟

الحل

القيمة الحالية (PV) أو العلاوة الوحيدة ((PU تكتب على النحو التالي:

$$UP = 15000a_{x|\overline{20|}} = 15000a_{\overline{n|}} - 15000a_{x:\overline{n|}}$$

يحصل المؤمن له على مبلغ (15000−15000=0) طالما بقي على قيد الحياة، وفي حالة الوفاة، يصرف له الدخل المؤكد فقط المقدر بـ15000.

(9.2) الإيرادات المجزأة

تدرج في بنود عقد التأمين عادة ما يسمى بالعلاوات المجزأة في حالة السداد أو القبض. سوف نستخدم قواعد مشابهة للقواعد رقم (4.31) ورقم (4.32).

الرموز:

$\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n|}}$: القيمة الحالية (أوUP) لدخل الوحدة العمري والمدفوع مسبقا قبل العد (preanumerando) بصورة مجزأة بحساب $\frac{1}{m}$ في كل جزء.

سوف نبين فيما يلي نوعين فقط من القيم الحالية، حيث بالإمكان الحصول على القيم الحالية الأخرى بنفس الطريقة.

الدخل المسبق (ما قبل العد) ولمدى الحياة

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=0}^{m(w-x)} v^{\left(\frac{t}{m}\right)} \frac{l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x} \tag{9.12}$$

الدخل المؤخر (ما بعد العد) والمؤقت

$$a_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{nm} v^{\left(\frac{t}{m}\right)} \frac{l_{x+\frac{1}{m}}}{l_x} \tag{9.13}$$

لإيجاد قيمة $_{x+\frac{1}{m}}$ نستخدم طريقة التوليد الخطي بين عمرين صحيحين متتاليين:

$$l_{x+\frac{1}{m}} = \left(1 - \frac{t}{m}\right) l_x + \frac{t}{m} l_{x+1}$$

بشكل عام يمكن حساب الأعمار غير الصحيحة x بالطريقة التالية:

$$l_{x+\theta} = (1-\theta) l_x + \theta l_{x+1} \tag{9.14}$$

يمكن للقارئ مراجعة الفقرة 17.2 من هذا الكتاب للتعرف عن كثب على طريقة التوليد الخطي.

مثال: احسب القيمة $_{24,3}$ بالنسبة لامرأة وذلك باستخدام جدول الوفاة الموجود بالملحق.

الحل

$$l_{24} = 98'778, l_{25} = 98'727$$

وبالتالي فإن: $l_{24,3} = 0{,}7 l_{24} + 0{,}3 l_{25} = 98'762$

(9.3) الدخل لشخصين

نستخدم نفس القوانين المبينة أعلاه ولكن بالأخذ في الاعتبار الشخص الثاني، حيث إن الخدمات التأمينية المقدمة لشخصين تميز بين الخدمات المقدمة عند وفاة الشخص الأول من الخدمات المقدمة عند وفاة الشخص الثاني.

الرموز:

$\ddot{a}_{xy}$: القيمة الحالية (UP) لدخل عمري فوري لشخصين يصرف في حالة بقاء أحدهما على قيد الحياة.

$\ddot{a}_{\overline{xy}}$ القيمة الحالية (UP) لدخل عمري فوري لشخصين يصرف بعد الوفاة الثانية (أي بعد وفاة الشخصين).

القواعد

$$\ddot{a}_{xy} = \sum_{t=0}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{l_{y+t}}{l_y} \quad (9.15)$$

$$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy} \quad (9.16)$$

وبنفس الطريقة نحسب المداخيل الأخرى، حيث نحصل على:

$$\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{y:\overline{n}|} - \ddot{a}_{xy:\overline{n}|} \quad (9.17)$$

(9.3.1) دخل البقاء على قيد الحياة

نعرّف الرموز التالية:

$\ddot{a}_{x|y}$: القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد لشخصين يصرف في حال بقاء y فقط على قيد الحياة.

$\ddot{a}_{y|x}$: القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد لشخصين يصرف في حال بقاء x فقط على قيد الحياة.

القواعد المناسبة لهذه الرموز هي:

$$\ddot{a}_{x|y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy} \quad (9.18)$$

$$\ddot{a}_{y|x} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{xy} \quad (9.19)$$

(9.3.2) تركيبات عقود التأمين

يمكن للمؤمن له أن يرغب في تأمين شامل لشخصين من خلال عدة تركيبات حياة- وفاة. من أجل ذلك فإن حساب القيمة الحالية (PV) يجب أن يتبع القانون العام الآتي:

$$PV = (A-D)PV_x + (B-D)PV_y + (C-B-A+D)PV_{xy} + DPV_{\overline{xy}} \quad (9.20)$$

حيث:

A: المبالغ المصروفة في حال بقاءx فقط على قيد الحياة.

B: المبالغ المصروفة في حال بقاء y فقط على قيد الحياة.

C: المبالغ المصروفة في حال بقاء الزوجين x و y على قيد الحياة.

D: المبالغ المصروفة في حال وفاة الزوجين x و y .

مثال: لدينا زوجان يعولان طفلا عمره 5 سنوات، طالما بقيا الزوجان على قيد الحياة فإنه لا ضرورة لصرف أي دخل. في حال وفاة الزوج يصرف مبلغ 15000 ف.س. طيلة 20 سنة. وفي حال وفاة الزوجة يصرف 10000 ف.س. وفي حال وفاة الزوجين يصرف 30000 ف.س طيلة عشرين سنة للمساهمة في العناية بالطفل. أوجد القيمة الحالية لهذه التركيبة من التأمينات.

الحل

A: المبالغ المصروفة في حال بقاءx فقط على قيد الحياة:10000 ف.س.

B: المبالغ المصروفة في حال بقاء y فقط على قيد الحياة:15000 ف.س.

C: المبالغ المصروفة في حال بقاء الزوجين x وy على قيد الحياة: 0 ف.س.

D :المبالغ المصروفة في حال وفاة الزوجين x و y :30000 ف.س.

وبالتالي:

$$VA = -20'000\,\ddot{a}_{x:\overline{20}|} - 15'000\,\ddot{a}_{y:\overline{20}|} + 5'000\,\ddot{a}_{xy:20|} + 30'000\,\ddot{a}_{\overline{20}|}$$

ملاحظة:

إذا كانت $A = 1; B = 1, C = 1, D = 0$ فذلك يعني أن:$\ddot{a}_{\overline{xy}} = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$.

إذا كانت $A = 1; B = 0, C = 0, D = 0$ فذلك يعني أن:$\ddot{a}_{\overline{x|y}} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{xy}$.

(9.4) تمارين

1- استخدم جدول الوفاة المرفق بالملحق لإيجاد القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد تم صرفه لمؤمن لها عمرها 105 سنوات طالما بقيت على قيد الحياة. نسبة الفائدة المستعملة: 4%.

2- باستخدام جدول الوفاة في الملحق، أوجد القيمة الحالية لدخل عمري ما بعد العد صرف لمؤمن لها عمرها 105 سنوات طالما بقيت على قيد الحياة. نسبة الفائدة المستعملة: 4%.

3- استخدم نتائج التمرينين الأول والثاني للتاكد من المعادلة التالية:

$$a_x = \ddot{a}_x - 1$$

4- استخدم جدول الوفاة المرفق بالملحق لإيجاد القيمة الحالية لدخل عمري ما بعد العد تم صرفه لمؤمن له عمره 40 سنة لمدة 4 سنوات طالما بقي على قيد الحياة. نسبة الفائدة المستعملة: 3%.

5- اكتب العبارة الأكتوارية لدخل ما قبل العد سنوي يقدر بـ 250 € ، تم صرفه طيلة 25 سنة لمؤمن لها عمرها 18 سنة.

6- سوف يصرف لمؤمن له عمره 35 سنة مبلغ 100000 € إذا بقي على قيد الحياة إلى حين بلوغه 65 سنة. ما هي القيمة الحالية لهذه التغطية التأمينية إذا اعتبرنا نسبة فائدة 2% وجدول الوفاة المرفق بالملحق.

7- اكتب العبارة الأكتوارية للقيمة الحالية لدخل سنوي ما بعد العد يقدر بـ 5000 ف.س يصرف لمؤمن له حال بلوغه سن 65. علما بأن عمره حاليا هو 18 سنة.

8- حددت علاوات بقيمة 4000 € وجب صرفها لمدة عامين ما قبل العد إذا بقي المؤمن له (30 سنة حاليا) على قيد الحياة.

(أ) احسب القيمة الحالية لتلك العلاوات دون اعتبار نسبة الفائدة ولا الوفيات.

(ب) احسب القيمة الحالية باعتبار الفائدة فقط التي تقدر نسبتها بـ3%.

(جـ) احسب القيمة الحالية باعتبار نسبة قائدة 3% وجدول الوفاة المرفق بالملحق.

9- استخدم الرموز الأكتوارية للتعبير عن القيمة الحالية لدخل مدى الحياة مبين في الشكل التالي. علما بأن المؤمن له عمره حاليا 40 سنة.



10- إذا علمت أن :

$$l_x = 1'000\,(1 - \frac{x}{120})$$

أوجد القيمة الحالية التالية باستخدام نسبة فائدة 5%:

$$a^{(2)}_{30:\overline{1}|}$$

11- فسر القاعدة التالية:

$$12'000\,{}_{25|}\ddot{a}_{40:\overline{8}|}$$

12- فسر القاعدة التالية:

$$12000\,{}_{5|}\ddot{a}^{(12)}_{25:30:\overline{10}|}$$

13- ■رأى زوجان في سن التقاعد أنه من الضروري لهما أن يحصلا على دخل سنوي يساوي 20000 ف.س طالما بقيا الاثنان على قيد الحياة وذلك بالإضافة إلى المعاش. إذا أصبحت الزوجة أرملة بفقدان زوجها فهي بحاجة إلى دخل يساوي 15000 ف.س. أما في صورة بقاء الزوج على قيد الحياة فهو يرغب في الحصول على مبلغ يساوي 8000 ف.س سنويا إضافة إلى راتبه التقاعدي. أوجد القيمة الحالية لهذه التركيبة التأمينية.

تأمينات رؤوس الأموال
Assurances de Capitaux

يهتم الفصل الحالي أساسا بالتغطية في حالة الوفاة، ففي الفصل السابق وجب صرف دخل للمستفيدين بينما في هذا الفصل سوف يصرف لهم مبلغ في حالة وفاة المؤمن له خلال فترة الضمان. كما سيتم حساب العلاوة الوحيدة (UP) بنفس الطريقة المبينة في الفصل السابق أي بالاعتماد على اسلوب التوقع الرياضي. وهذا المفهوم تم التطرق إليه في الفقرة (17.3.3).

في حالة تحديد الفترة مسبقا فإن التأمين سيكون مؤقتا. أما في صورة وجود فترة ترقب قبل بداية تطبيق الضمان فإن التأمين يسمى تأمينا مؤجلا. في الغالب يقوم المؤمن بصرف المبلغ المحدد في العقد في نهاية السنة التي توفي خلالها المؤمن له. وهو ما يأخذ به في احتساب القيم الحالية.

مثال رقم (1): يوجب عقد التأمين المبرم بين إحدى الشركات وأحد عملائها صرف مبلغ 50000 € إذا فقدت المؤمن لها حياتها في تمام الأربعين من عمرها. تبلغ المؤمن لها حاليا 30 سنة.أوجد العلاوة الوحيدة (UP) المطلوب تسديدها من العميلة باستخدام جدول الوفاة في الملحق ونسبة فائدة 3%.

الحل

في حالة الوفاة قبل الأربعين لا يوجد أي تعويض. وفي صورة وفاة العميلة في سن الأربعين. فالمبلغ سوف يصرف في نهاية سنة الوفاة، أي بعد 11 سنة. وبالتالي فإن العلاوة الوحيدة (UP) تحسب كما يلي:

$$UP = 50'000v^{11}\frac{d_{y+n}}{l_y} = 50'000v^{11}\frac{d_{40}}{l_{30}}$$

أي:

$$UP = 50'000v^{11}\frac{l_{40}-l_{41}}{30} = 35{,}95€$$

مثال رقم (2): ينص عقد التأمين المبرم بين شركة التأمين وأحد عملائها على صرف مبلغ 500 ف.س في حالة وفاة المؤمن له وعمره x خلال الثلاث سنوات القادمة.ما هي العلاوة الوحيدة المطلوبة على العميل لكي يستفيد من هذه التغطية؟

الحل

بما أن العلاوة الوحيدة (UP) هي متغير عشوائي، فإنها تكتب على النحو التالي:

$$UP = 500v\frac{d_x}{l_x} + 500v^2\frac{d_{x+1}}{l_x} + 500v^3\frac{d_{x+2}}{l_x}$$

أي:

$$UP = 500\sum_{t=0}^{2} v^{t+1}\frac{d_{x+t}}{l_x}$$

الرموز:

نستخدم حرف A بدلا من a لكتابة القيم الحالية لرؤوس الأموال.

مثال: A_x ,$A_{x,\overline{n|}}$. وسوف نستعرض في الفقرات القادمة الرموز المستخدمة حسب نوعية التغطية التأمينية. عند حساب القيم الحالية لرؤوس الأموال فإن مفاهيم ما

قبل العدْ وْما بعد العدْ سوف تزول حيث إن المبلغ المتحصل عليه من المؤمن يتم صرفه دائما في نهاية السنة التي توفي فيها المؤمن له. لكن بعض الشركات تقوم بصرف المبلغ على إثر الوفاة مباشرة. في هذه الحالة، يفترض أن تتم العمليات الحسابية على أساس أن الوفاة حدثت في وسط السنة. وبالتالي فإن ذلك سيكون له تأثير على معامل الخصم فحسب.

مثال: ينص عقد التأمين المبرم بين شركة التأمين وأحد عملائها على صرف مبلغ 500 ف.س من قبل الشركة في حالة وفاة المؤمن له وعمره x خلال الثلاث سنوات القادمة.ما هي العلاوة الوحيدة المطلوبة على العميل لكي يستفيد من هذه التغطية، إذا تقرر صرف المبلغ مباشرة بعد حادث الوفاة؟

الحل

$$UP = 500v^{0.5}\frac{d_x}{l_x} + 500v^{1.5}\frac{d_{x+1}}{l_x} + 500v^{2.5}\frac{d_{x+2}}{l_x}$$

وهو ما يمكن كتابته كذلك على النحو التالي:

$$UP = 500\sum_{t=0}^{3} v^{t+0.5}\frac{d_{x+t}}{l_x}$$

(10.1) تركيبات كلاسيكية

النماذج الأكثر استخداما في تأمين رؤوس الأموال هي: التأمين لمدى الحياة، التأمين المؤقت أو المؤجل وخاصة التأمين المختلط.

(10.1.1) تأمين على رأس مال في حالة الوفاة

المبلغ يتم صرفه في حالة الوفاة خلال فترة حياة المؤمن له. المبلغ يتم صرفه إذا في كل الحالات.

الرموز:

A_x:القيمة الحالية (UP) لرأس مال وحدة يصرف عند وفاة المؤمن له.

القاعدة الكاملة

$$A_x = v\frac{d_x}{l_x} + v^2\frac{d_{x+1}}{l_x} + v^3\frac{d_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{w-x+1}\frac{d_w}{l_x} \quad (10.1)$$

القاعدة المختصرة

$$A_x = \sum_{t=0}^{w-x} v^t \frac{d_{x+t}}{l_x} \quad (10.2)$$

مثال: ما هي العلاوة الوحيدة (UP) لرأس مال مدى الحياة عند الوفاة قدره 100000 ف.س لمؤمن له عمره x؟

الحل

العلاوة الوحيدة أو القيمة الحالية تكتب على النحو التالي:$100'000A_x$.

(10.1.2) رأس مال مؤقت عند الوفاة

رأس المال لا يصرف إلا في حال حدوث الوفاة خلال n سنوات القادمة.

الرموز:

${}_{|n}A_x$: القيمة الحالية (UP) لرأس مال يصرف عند وفاة المؤمن له إذا حدث ذلك خلال n سنوات القادمة.

القاعدة الكاملة

$${}_{|n}A_x = v\frac{d_x}{l_x} + v^2\frac{d_{x+1}}{l_x} + v^3\frac{d_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^n\frac{d_{x+n+1}}{l_x} \quad (10.3)$$

القاعدة المختصرة

$${}_{|n}A_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} \quad (10.4)$$

مثال: ينص عقد التأمين المبرم بين شركة التأمين وأحد عملائها على صرف مبلغ 35000 € من قبل الشركة في حالة وفاة المؤمن له وعمره 40 سنة خلال العشرين سنة القادمة.ما هي العلاوة الوحيدة المطلوبة على العميل لكي يستفيد من هذه التغطية؟

الحل

$$UP = 35'000_{|n}A_x$$

(10.1.3) رأس مال مؤجل عند الوفاة

لا يتم صرف رأس المال إلا بعد مرور فترة زمنية قدرها k غير مضمونة.يمكن لرأس المال أن يكون لمدى الحياة أو لفترة مؤقتة كما هو مبين في القوانين التالية:

الرموز:

$_{k|}A_x$ القيمة الحالية (UP) لرأس مال وحدة يصرف عند وفاة المؤمن له إذا حدثت الوفاة بعد k سنة.

$_{k|\,n}A_x$ القيمة الحالية (UP) لرأس مال وحدة يصرف عند وفاة المؤمن له إذا حدثت الوفاة بعد k سنة وخلال الـ n سنة التي تلي الـ k سنوات الأوائل للوفاة.

رأس مال مؤجل:

$$_{k|}A_x = \sum_{t=k}^{w-x} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} \quad (10.5)$$

رأس مال مؤجل ومؤقت:

$$_{k|\,n}A_x = \sum_{t=k}^{k+n-1} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} \quad (10.6)$$

العلاقة التالية تربط بين التغطية لمدى الحياة والتغطية المؤقتة والمؤجلة:

$$A_x = {}_{n|}A_x + {}_{n|}A_x \quad (10.7)$$

مثال: اكتب العبارة التالية باستخدام الرموز الأكتوارية:

$$UP = 50'000v^{11}\frac{d_{40}}{l_{30}} + 50'000v^{12}\frac{d_{41}}{l_{30}}$$

الحل

$$UP = 50'000_{10|\ 2}A_{30}$$

(10.1.4) رأس مال في حالة البقاء على قيد الحياة

يقوم رأس المال في حالة البقاء على قيد الحياة بدور مهم جدا، وخاصة في التأمينات المختلطة التي سنتطرق إليها لاحقا.

الرمز:

${}_nE_x$:القيمة الحالية (أو UP) لرأس مال وحدة يصرف في حال بقاء المؤمن له على قيد الحياة خلال n سنة.

القاعدة

$$ {}_nE_x = v^n\frac{l_{x+n}}{l_x} \quad (10.8)$$

مثال: ينص عقد التأمين المبرم بين شركة التأمين وأحد عملائها على أن تصرف الشركة مبلغ 100000 € إلى العميل الذي يبلغ من العمر 40 سنة في حال بقائه على قيد الحياة إلى سن 65. اكتب العلاوة الوحيدة (UP) لصورة هذا العقد باستخدام رمز أكتواري.

الحل

$$UP = 100'000_{25}E_{40}$$

(10.1.5) التأمينات المختلطة

هي تركيبة مختلفة من التأمينات حيث يتم مزج عقد التأمين المؤقت في حالة الوفاة مع عقد التأمين في حالة البقاء على قيد الحياة. عمليا يمكن لرأس المال في حالة الوفاة أن يكون مختلفا على رأس المال في حالة الوفاة. يجب -إذن- التعامل مع رأس المال في حالة البقاء على قيد الحياة ورأس المال في حالة الوفاة كل على حدة لكل مبلغ مؤمن.

الرمز:

$A_{x:\overline{n|}}$: القيمة الحالية (UP) لرأس مال وحدة يصرف في حالة وفاة المؤمن له خلال n سنة القادمة أو في حال بقاء المؤمن له على قيد الحياة عند نهاية الفترة.

القاعدة

$$A_{x:\overline{n|}} = {}_{|n}A_x + {}_nE_x \qquad (10.9)$$

العلاقة التالية تربط بين دخل عمري مؤقت وتأمين مختلط:

$$A_{x:\overline{n|}} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \qquad (10.10)$$

مثال: إذا علمت أن $\ddot{a}_{20:\overline{2|}}$=1.969354 من خلال جدول الوفاة المرفق في الملحق، أوجد قيمة الرمز $_{20:\overline{2|}}$. استخدم نسبة فائدة تساوي 3%.

الحل

بما أن $0.0291262 = \frac{0.03}{1.03} = \frac{i}{i+1} = d$ إذاً:

$$A_{20:\overline{2|}} = 1 - 0.0291262 \times 1.969354 = 0.94264$$

(10.2) تأمين على الوفاة لشخصين

نميز التأمينات على الوفاة الأولى (الشخص الأول) من التأمينات على الوفاة الثانية (الشخص الثاني).

الرموز:

A_{xy}: القيمة الحالية (UP) لرأس مال مدفوع في حال حدوث الوفاة الأولى.

$A_{\overline{xy}}$: القيمة الحالية (UP) لرأس مال مدفوع في حال حدوث الوفاة الثانية.

نستخدم القواعد المتعلقة بتأمين رأس مال لشخص واحد بتوظيفها على حالة الشخصين لكي تصبح مثلا كما يلي:

$$A_{xy} = \sum_{t=0}^{w-x} v^{t+1} \frac{d_{x+t:y+t}}{l_{xy}} = \sum_{t=0}^{w-x} v^{t+1} \frac{l_{x+t}l_{y+t} - l_{x+t+1}l_{y+t+1}}{l_{xy}}$$

$$A_{\overline{xy}:\overline{n|}} = A_{x:\overline{n|}} + A_{y:\overline{n|}} - A_{xy:\overline{n|}}$$

(10.3) تمارين

1- تعهدت مؤسسة تأمين بدفع مبلغ 15000 € حين يتوفى المؤمن له. اكتب عبارة (UP) لهذا العقد.

2- تعهدت مؤسسة تأمين بدفع مبلغ 15000 € إلى مؤمن له يبلغ من العمر 28 عاما وذلك عند وفاته قبل بلوغه سن 65 عاما. اكتب عبارة (UP) لهذا العقد.

3- تعهدت مؤسسة تأمين بدفع مبلغ 15000 € إلى مؤمن له يبلغ من العمر 28 عاما وذلك عند وفاته قبل بلوغه سن 65 عاما أو في حال بلوغه سن 65 عاما. اكتب عبارة (UP) لهذا العقد.

4- تعهدت مؤسسة تأمين بدفع مبلغ 10000 frs إلى مؤمن له يبلغ من العمر 30 عاما وذلك عند وفاته قبل بلوغه سن 40 عاما، و20000 frs إذا توفي بين 40

و50 عاما وأخيرا 15000 frs إذا بقي على قيد الحياة في سن 50 عاما.اكتب عبارة (UP) لهذا العقد.

5- من خلال جدول وفاة محدد ونسبة فائدة محددة حصلنا على القيم الحالية التالية التي تتضمن مؤمن له عمره 50 عاما ولفترة قدرها 10 سنوات:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = 7.4856542 \quad \text{و} \quad A_{x:\overline{n|}} = 0.54312909$$

اعتمادا على العلاقة بين $\ddot{a}_{:\overline{n|}}$ و $A_{x:\overline{n|}}$أوجد نسبة الفائدة المستخدمة.

6- إذا كانت $_{x} = 100 - x$ حيث $0 \leq x \leq 100$ و$i = 0.05$ احسب $A_{40:\overline{25|}}$

7- ■أثبت ما يلي:$_{n|}A = {}_{n}E_{x}A_{x+n}$

8- إذا كانت: $A_x = 0.25$ و $A_{x+20} = 0.40$ و$A_{x:\overline{20|}} = 0.55$ احسب:

(أ) $_{20}E_x$.

(ب)$_{|20}A_x$.

9- استخدم جدول الوفاة المرفق في الملحق ونسبة فائدة 3% لإيجاد القيمة الحالية لرأس مال عند الوفاة ولمدى الحياة وذلك لرجل عمره 105 سنة.

10- ■ جدول الوفاة الافتراضي التالي يبين معدل الوفيات عند الذكور والإناث لمجموعة من الأعمار:

x	l_x	l_y
1	10	12
2	8	10
3	6	9
4	2	6
5	1	3
6	0	2

افترض كذلك أن نسبة الفائدة تساوي 10%.

(أ) أوجد A_y و $\ddot{a}_y$ لـ$y = 4$.

(ب) تأكد من المعادلة التالية باستخدام نتائج السؤال (أ):

$$A_y = 1 - d\ddot{a}_y$$

(جـ) احسب القيمة $A_{x:\overline{3}|}$ لـ$x = 2$ ، أوجد $\ddot{a}_{x:\overline{3}|}$.

(د) احسب القيمة الحالية لرأس مال في حالة البقاء على قيد الحياة لمؤمن له عمره سنتان.

(هـ) ليكن لدينا مؤمن له ومؤمن لها عمر كل منهما سنتان. احسب (UP) لرأس مال بقيمة 100 € ويصرف إذا بقي الزوجان على قيد الحياة إلى سن 5 سنوات.

(و) ليكن لدينا مؤمن له ومؤمن لها عمر كل منهما سنتان. احسب (UP) لرأس مال بقيمة 100 € ويصرف فقط في حالة بقاء y أو x على قيد الحياة إلى حين بلوغهما سن الخامسة. في المقابل لا يصرف أي مبلغ في حال بقاء الاثنين على قيد الحياة.

(ز) مؤمن له ومؤمن لها عمر كل منهما سنتان. احسب (UP) لرأس مال بقيمة 100 يصرف عند حدوث أول وفاة.

(ح) مؤمن له ومؤمن لها عمر كل منهما سنتان. احسب (UP) لرأس مال بقيمة 100 يصرف عند حدوث الوفاة الثانية.

11- ■ قدرت مؤسسة خسائرها المالية بمقدار frs 500000 لمدة ثلاث سنوات في حال وفاة مديرها العام. لذا قررت المؤسسة إبرام عقد تأميني مع إحدى شركات التأمين ينص على صرف مبلغ frs 500000 سنويا إلى المؤسسة لمدة ثلاث سنوات في صورة وفاة المدير العام خلال العشر سنوات القادمة. أوجد العلاوة الوحيدة (UP) لهذا العقد.

الفصل الحادي عشر

عدد التبديلات
Nombres de Commutation

تعد الأعداد التبديلية أعدادا مساعدة تجمع بين معامل الخصم وقانون الأحياء بهدف تسهيل العمليات الحسابية. وفي زمن كان الحساب اليدوي يلعب دورا كبيرا كسبت هذه الأعداد أهمية قصوى. ولا تزال هذه الأعداد تستخدم اليوم في عمليات حسابية فردية أو كجداول مساعدة مدرجة في الحاسب الآلي. عمليا، تمكن هذه الأعداد من كتابة القيم الحالية العادية التي تم تعريفها في الفصلين 9 و10 بطريقة أسهل وكذلك تمكن من حساب سريع للقيم الحالية والعلاوات في العقود التأمينية على رأس المال في حالة الوفاة أو في حالة البقاء على قيد الحياة.

(11.1) تبديلات الحياة

تمكن هذه التبديلات من نسخ القيم الحالية المتعلقة بالمداخيل؛ لذلك فهي تطبق خصوصا في عقود التأمين في حالة البقاء على قيد الحياة. الرموز المستخدمة هي:D, N, S. لن نقدم تعريفا للحرف S الذي يستخدم للمداخيل التصاعدية والتي لم يتم التطرق إليها في هذا الكتاب. الحروف D، N تأخذ مفهوما ذاكريا كما هو مبين في تعريفها الآتي:

- D تدل على عدد يوضع في أكثر الأحيان في بسط الكسر.
- تدل على عدد يوضع في أكثر الأحيان في مقام الكسر.

من المساوئ الأساسية لأعداد التبديلات هي وجود جدول للتبديلات لكل نسبة فائدة. في المقابل فهي تسهل بشكل كبير عمليات حساب القيم الحالية للدخل (العمري وغيره) ولرؤوس الأموال.

(11.1.1) التبديلات لفرد واحد

$$D_x = l_x v^x \tag{11.1}$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_w = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+t} \tag{11.2}$$

كتابة القيمة الحالية حسب عدد التبديلات يستدعي بعض العمليات الحسابية.

نبدأ أولا بضرب البسط والمقام بـv^x بهدف الحصول على عبارة من نوع $l_x v^x$ وهو ما يمكن من تعريف D_x.

مثال: اكتب عبارة القيمة الحالية التالية في شكل عدد التبديلات:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

الحل

$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$ هي:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^x \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

نضرب البسط والمقام بـv^x وهو ما يعطينا بعد عمل الاختزالات اللازمة:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^x \frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{v^x}{v^x} = \frac{1}{l_x v^x}\sum_{t=0}^{n-1} v^{x+t}\, l_{x+t} = \frac{1}{D_x}\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}$$

وهو ما يمكن كتابته كذلك:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

(11.1.2) القيم الحالية الأساسية بدلالة الأعداد التبديلية

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \quad (11.3)$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \quad (11.4)$$

$$a_{x:\overline{n|}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \quad (11.5)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \quad (11.6)$$

$$_{k|}a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x} \quad (11.7)$$

$$_{k|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+k}}{D_x} \quad (11.8)$$

$$_{k|}a_{x:\overline{n|}} = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x} \quad (11.9)$$

$$_{k|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x} \quad (11.10)$$

$$a_x^{(m)} = \frac{N_{x+1} + \frac{m-1}{2m} D_x}{D_x} \quad (11.11)$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{N_x + \frac{m-1}{2m} D_x}{D_x} \quad (11.12)$$

$$a_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1} + \frac{m-1}{2m} (D_x - D_{x+n})}{D_x} \quad (11.13)$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \frac{N_x - N_{x+n} - \frac{m-1}{2m} (D_x - D_{x+n})}{D_x} \quad (11.14)$$

مثال: ما هي العلاوة الوحيدة (UP) التي يجب على مؤمن له دفعها لتمويل دخل تقاعدي يقدر بـ 12000€ سنويا يدفع ما قبل العد حين يبلغ من العمر 65 سنة؟ استخدم جدول التبديلات المرفق بالملحق وذلك لنسبة فائدة تساوي 3%.

الحل

العلاوة الوحيدة التي يجب على المؤمن له دفعها مقابل هذه الخدمة تكتب على النحو التالي:

$$UP = 12'000_{29|}\ddot{a}_{36} = 12'000\frac{N_{65}}{D_{36}}$$

وهو ما يعطينا في الأخير:

$$12'000 \times \frac{144'27}{33'84} = 52'567{,}88€$$

(11.1.3) التبديلات لشخصين

أعداد التبديلات لشخصين تعرف على النحو التالي:

$$D_{xy} = l_x l_y v^{\frac{x+y}{2}} \quad (11.15)$$

$$N_{xy} = D_{xy} + D_{x+1y+1} + D_{ww} = \sum_{t=0}^{w-x} D_{x+ty+t} \quad (11.16)$$

(11.2) التبديلات للوفاة

تمكن هذه التبديلات من نسخ القيم الحالية لرؤوس الأموال، وبالتالي فهي تطبق خاصة على التأمينات في حالة الوفاة.تظهر الرموز ثلاثة أنواع من الحروف: C, M, R. سوف لن نعرف الحرف R المستخدم للمستحقات التزايدية والتي لم نتطرق إليها في هذا الكتاب.

الحروف C, M تنطوي على مفهوم ذاكري وفعليا هي تعرف كالآتي:

C تدل على أنها الحرف الذي يسبق حرف D في ترتيب الحروف الأبجدية وهو الحرف الذي نجده في التبديلات عند البقاء على قيد الحياة.

M تدل على أنها الحرف الذي يسبق حرف N في ترتيب الحروف الأبجدية وهو الحرف الذي نجده في التبديلات عند البقاء على قيد الحياة.

(11.2.1) التبديلات لشخص واحد

$$C_x = d_x v^{x+1} \tag{11.17}$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + D_{w-1} = \sum_{t=0}^{w-x-1} C_{x+t} \tag{11.18}$$

لإيجاد القيم الحالية لرؤوس الأموال من خلال التبديلات نقوم ببعض التغييرات على القواعد المماثلة المبينة في الفقرات السابقة، نبدأ بضرب البسط والمقام بـv^x لكي نوجد في الأخير العبارة C_x.

مثال: حرر القيمة الحالية من خلال عدد التبديلات لرأس مال في حالة الوفاة وذلك لمؤمن له عمره x ولمدى الحياة.

الحل

A_x تحسب كالآتي:

$$A_x = \sum_{t=0}^{w-x} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x}$$

نضرب البسط والمقام بـv^x وهو ما يعطينا بعد اختزال الكسر:

$$A_x = \sum_{t=0}^{w-x} v^{t+1} \frac{d_{x+t}}{l_x} \frac{v^x}{v^x} = \frac{1}{l_x v^x} \sum_{t=0}^{w-x} v^{x+t+1} d_{x+t} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{w-x} C_{x+t}$$

وهو ما يكتب كذلك:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

(11.2.2) القيم الحالية الأساسية بدلالة الأعداد التبديلية

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \quad (11.19)$$

$$_{|n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \quad (11.20)$$

$$_{k|}A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x} \quad (11.21)$$

$$_{k|n}A_x = \frac{M_{x+k} - D_{x+n}}{D_x} \quad (11.22)$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \quad (11.23)$$

$$_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \quad (11.24)$$

مثال: احسب العلاوة الوحيدة لعقد تأمين مختلط بقيمة frs 15000 لفائدة مؤمن لها عمرها 50 سنة. المعطيات الأخرى: فترة التأمين: 12 سنة. القواعد الفنية للعمليات الحسابية: عدد التبديلات في الملحق بنسبة فائدة 3%.

الحل

العلاوة الوحيدة لهذه الخدمة تكتب على النحو التالي:

$$UP = 15'000A_{50:\overline{12}|} = \frac{M_{50} - M_{62} + D_{62}}{D_{50}}$$

وهو ما يعطي في النهاية:

$$15'000 \times \frac{8'557{,}43 - 7'746{,}65 + 14'702{,}83}{21'967{,}02} = 10'34\ frs$$

(11.2.3) التبديلات على شخصين

أعداد التبديلات على شخصين تعرف على النحو التالي:

$$C_{xy} = d_{xy} v^{\frac{x+y}{2}+1} \quad (11.25)$$

$$M_{xy} = C_{xy} + C_{x+1y+1} + C_{ww} = \sum_{t=0}^{w-x} C_{x+ty+t} \qquad (11.26)$$

(11.3) جدول التبديلات

تبدأ جداول التبديلات عادة برقم أولي يساوي 100000 شخص بعمر صفر سنة رغم وجود احتمال الوفاة في عمر صفر سنة، لكن أي رقم آخر أولي يمكن أن يأخذ مكانه في هذا الجدول. حيث لو كان لدى مؤسسة تأمينية عملاء تتجاوز أعمارهم جميعا الثلاثين سنة فذلك لا يمنع المؤسسة من الاعتماد على جدول تبديلات يبدأ من عمر 30 سنة بـ 5000 شخص مثلا. وذلك لا يمكنه أن يؤثر على نتائج القيم الحالية.

يوجد عرف إضافي في التبديلات على شخصين. حيث إن العبارة $v^x l_x l_y$ عادة تكون كبيرة الحجم في كتابتها لذلك نعوضها بالعبارة $10^{-5} v^x l_x l_y$ إذا كان عدد الأشخاص يساوي 100000 (10^{-5}). وهذا يجعل العبارة أقل حجما وتقترب من حجم القيم l_y أو x .

في النهاية لا بد من التذكير بأن جدول التبديلات على شخصين يجب أن يصمم بالإشارة إلى فارق السن بين مؤمنين لهما. وإنشاء الجدول يصبح سهلا جدا باستخدام برنامج الجداول الإلكترونية إكسل. حيث يكفي التزود باحتمالات الوفاةq_x وq_y لكل الأعمار.

المثال التالي يبين كيفية إدخال القواعد في الخلايا الأولى لإنشاء جدول التبديلات بنسبة فائدة 3% وذلك بالاستعانة ببرنامج الجداول الإلكترونية إكسل. قيم l_x تأخذ من جدول الوفاة المرفق بالملحق.

تبديلات الحياة

	A	B	C	D
1	x	lx	Dx	Nx
2	0	100000	=B2*1.03^-A2	=SUM(C2:C$110)
3	1	99246	=B3*1.03^-A3	=SUM(C3:C$110)
4	2	99183	=B4*1.03^-A4	=SUM(C4:C$110)

تبديلات الوفاة

	A	B	C	D
1	x	lx	Cx	Mx
2	0	100000	=(B2-B3)*1.03^-(A2+1)	=SUM(C2:C$110)
3	1	99246	=(B3-B4)*1.03^-(A3+1)	=SUM(C3:C$110)
4	2	99183	=(B4-B5)*1.03^-(A4+1)	=SUM(C4:C$110)

ملاحظة: الأعمدة C, D, E, F يمكن نسخها بأكملها إلى أسفل في عملية واحدة. بعد التدرب قليلا على كتابة القوانين يمكن إنشاء جدول تبديلات بسرعة فائقة.

(11.4) تمارين

1- اكتب قانون العلاوة الوحيدة ثم احسب القيمة المناسبة لتأمين رأس مال في حالة الوفاة خلال السنة لمؤمن له عمره 20 سنة وذلك باستخدام أعداد التبديلات المرفق بالملحق. علما بأن رأس المؤمن هو: 80000 €.

2- اكتب قانون العلاوة الوحيدة ثم احسب القيمة المناسبة لتأمين رأس مال في حالة الوفاة لمدى الحياة لمؤمن له عمره 20 سنة وذلك باستخدام أعداد التبديلات المرفقة بالملحق، علما بأن رأس المؤمن هو: 80000 €.

3- استخدم جدول التبديلات المرفق بالملحق لحساب القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد قيمته 48000 frs يصرف إلى مؤمن لها عمرها 45 سنة طالما بقيت على قيد الحياة.

4- استخدم جدول التبديلات المرفق بالملحق لحساب القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد قيمته 4000 frs شهريا يصرف إلى مؤمن لها عمرها 45 سنة طالما بقيت على قيد الحياة.

5- ينص عقد تأمين على الحياة أن تصرف مؤسسة التأمين مبلغا قدره 15000 € إذا توفيت المؤمن لها وعمرها 28 سنة قبل بلوغها سن 62 أو إذا بقيت على قيد الحياة في سن 62. حرر واحسب العلاوة الوحيدة (UP) لهذا العقد باستخدام أعداد التبديلات في الملحق.

6- باستخدام جدول التبديلات في الملحق، احسب القيمة الحالية لدخل عمري سنوي ما بعد العد قيمته 4000 € يصرف لمؤمن له عمره 40 سنة لمدة أربع سنوات طالما بقي على قيد الحياة.

7- يوجب عقد التأمين على صرف مبلغ 10000 فرنك إذا توفي المؤمن له وعمره حاليا 30 سنة قبل بلوغه سن الأربعين و20000 فرنك إذا توفي بين الأربعين والخمسين و15000 فرنك إذا بقي على قيد الحياة في سن الخمسين. احسب العلاوة الوحيدة لهذا العقد باستخدام أعداد التبديلات في الملحق.

8- المطلوب توصيف نوعية التغطية الممثلة لكل من العبارات التالية:

(أ) $€\,1'000\left(\frac{C_{43}}{D_{43}}\right)$.

(ب) $€\,1'000\left(\frac{C_{43}+C_{44}+C_{45}+C_{46}}{D_{43}}\right)$.

(جـ) $€\,2'000\left(\frac{N_{65}-N_{75}}{D_{20}}\right)$.

(د) $€\,2'000\left(\frac{N_{65}}{D_{20}}\right)$.

(هـ) $€\,5'000\left(\frac{M_{65}}{D_{20}}\right)$.

(و) $€\,15'000\left(\frac{M_{25}-M_{50}+D_{50}}{D_{25}}\right)$.

(ز) $€\ 1'500\left(\frac{D_{65}}{D_{20}}\right)$.

9- احسب العبارات التالية مستعينا بأعداد التبديلات في الملحق (المؤمن له رجل):

(أ) $\ddot{a}_{55}$.

(ب) $a_{55:\overline{15}|}$.

(جـ) $\ddot{a}_{75:\overline{15}|}$.

(د) $\ddot{a}^{(12)}_{75:\overline{15}|}$.

(هـ) $A_{25:\overline{40}|}$.

(و) $A_{25:\overline{1}|}$.

10- اشرح العلاقة التالية باستخدام أعداد التبديلات:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - a_{x:\overline{n}|} = 1 - {}_{n}E_{x}$$

11- إذا علمت أن: $N_x = 40'713$, $N_{x+1} = 38'528$, $N_{x+2} = 36'433$, $i = 4\%$,

أوجد قيمة q_x.

12- ■ أبرم مؤمن له يبلغ من العمر 30 سنة عقد تأميني مع مؤسسة تأمينات لتأمين مؤقت عند الوفاة إلى حين بلوغه سن 65 عاما. وقد دفع في مقابل ذلك علاوة وحيدة تقدر بـ813,3853 'frs.أوجد رأس المال المؤمن باستخدام أعداد التبديلات في الملحق؟

13- ■ تعاقد مؤمن له عمره 30 عاما مع شركة تأمين قصد تأمين مبلغ 40000 € لمدة 25 عاما وأبرم العقد في صورة تأمين مختلط. أوجد العلاوة الوحيدة المطلوب دفعها من المؤمن له إذا افترضنا أن المؤمن أضاف نسبة 2% من رأس المال المؤمن في مقابل مصروفات إدارية سنوية طالما المؤمن له باق على قيد الحياة خلال مدة التعاقد. حرر ثم احسب العلاوة الوحيدة لهذا العقد باستخدام أعداد التبديلات في الملحق.

الفصل الثاني عشر

علاوات التأمين
Primes d'assurance

تحدد علاوات التأمين من خلال 3 عناصر هي: الفائدة، الخطورة، وكذلك التكلفة المتعلقة بإدارة العقد من طرف المؤمن. وترتبط العلاوات الصافية بالفائدة والخطورة فحسب. أما العلاوات الإجمالية التي تسمى أيضا العلاوات التسعيرية فيضاف إليها التكاليف الإدارية الأخرى. سوف نستعرض في هذا الفصل عدة أنواع من العلاوات.

(12.1) المفاهيم المختلفة للعلاوات

شكل التأمين وطريقة تمويله تؤدي إلى تعريف العلاوات الآتية:

- **العلاوة الوحيدة (UP)**. نجد هذا النوع من العلاوات أساسا في عقود تأمين على الدخل. تدفع هذه العلاوة الوحيدة عند إبرام العقد. وهي تمثل القيمة الحالية للخدمات (المبالغ) المؤمنة مستقبلا.
- **العلاوة السنوية (AP)** وهي تدفع عادة مسبقا (ما قبل العد) طالما المؤمن له باق على قيد الحياة ولمدة محددة.

- **العلاوة المجزأة** (FP) يمكن لمؤمن له أن يرغب في دفع علاوته مجزأة بالشهر، بربع السنة أو بنصف السنة. في هذه الحال نتحدث عن علاوة مجزأة.
- **العلاوة الصافية** (PP) وهي تساوي القيمة الحقيقية للخدمات المقدمة (المبالغ المستحقة للمؤمن له). وهي لا تأخذ في الاعتبار سوى الفائدة والخطورة. جميع العلاوات المحسوبة في الفصل السابق هي في حقيقة الأمر علاوات صافية.
- **العلاوة التجارية** (CP) تمثل العلاوة الصافية زائد مصاريف المؤمن.
- **العلاوة المتدرجة** (GP) يدفع المؤمن له طيلة نفاذ العقد نفس العلاوة مهما كان عمره ومهما كانت خطورة وفاته. وهي تحدد مرة واحدة في بداية التعاقد.
- **العلاوة المعاد حسابها سنويا** (PRA) في هذه الحالة يتم حساب العلاوة كل سنة مع الأخذ في الاعتبار عمر المؤمن له وخطر وفاته.
- **العلاوة المتوسطة** (AP) نجد هذا النوع من العلاوات عند التأمين الجماعي، حيث يدفع كل مؤمن على عكس التأمين الفردي مبلغا واحدا مهما كان عمره.

(12.2) قاعدة العمل الأساسية

تتمثل قاعدة العمل الأساسية لحساب العلاوات في حالة التأمين الفردي في الآتي:

القيمة الحالية للخدمات = القيمة الحالية للعلاوات	(12.1)

نتحدث في هذه الحالة عن مبدأ المعادلة الفردية.

بينما في حالة التأمين الجماعي (صناديق المعاشات التقاعدية مثلا) يطبق هذا المبدأ على مستوى إجمالي المؤمنين لهم. في هذه الحالة تمكننا قاعدة العمل التالية من حساب العلاوات:

$$\sum_{i=1}^{\text{عدد المؤمن لهم}} (\text{القيمة الحالية للخدمات}) = \sum_{i=1}^{\text{عدد المؤمن لهم}} (\text{القيمة الحالية للعلاوات}) \quad (12.2)$$

نتحدث في هذه الحالة عن مبدأ المعادلة الجماعية.

(12.3) العلاوات المختلفة

(12.3.1) العلاوات السنوية المتدرجة

لكي نستوعب جيدا مفهوم العلاوات السنوية المتدرجة لنأخذ المثال الآتي:

مثال: يرغب رجل عمره x في الحصول على رأس مال يساوي €1000 بعد عشر سنوات إن كان لايزال على قيد الحياة. في المقابل، فهو يتعهد بدفع علاوات سنوية (AP) مسبقة طيلة 5 سنوات. احسب العلاوة السنوية المتدرجة المطلوب دفعها لكل من الفرضيات التالية:

(أ) لا تستخدم الفائدة ولا الوفيات في العمليات الحسابية.

(ب) الفائدة فقط تستخدم في الحساب.

(جـ) الفائدة والوفيات يتم استخدامهما في العمليات الحسابية.

الحلول:

جميع الحالات يمكن تمثيلها على النحو التالي:

(أ) $PA + PA + PA + PA + PA = 1'000$ قاعدة العمل (12.1)

$5PA = 1'000$ إظهار

$PA = \frac{1'000}{5} = 200€$ القسمة على 5

ب) $A + PAv + PAv^2 + PAv^3 + PAv^4 = 1'000v^{10}$ قاعدةالعمل (12.1)

$PA\,(1 + v + v^2 + v^3 + v^4) = 1'000v^{10}$ إظهار

$PA\ddot{a}_{\overline{5}|} = 1'000v^{10}$ اختزال

$PA = \frac{1'000v^{10}}{\ddot{a}_{\overline{5}|}}$ القسمة على $\ddot{a}_{\overline{5}|}$

جـ) $PA\ddot{a}_{x:\overline{5}|} = 1'000\ {}_nE_x$ قاعدة العمل (12.1)

$PA = \frac{1'000\ {}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{5}|}}$ القسمة على $\ddot{a}_{x:\overline{5}|}$

(12.3.2) العلاوات المجزأة

يمكن للعلاوة أن تثقل كاهل المؤمن له حين يختار دفعها سنويا. في بعض الحالات يسمح للمؤمن له تسديد علاواته شهريا أو ربع سنويا أو نصف سنويا. تجزئة العلاوة السنوية يؤدي إلى:

- تسديد علاوة سنوية إجمالية أعلى.
- الترفيع في المصاريف الإدارية للمؤمن وهو ما يتم تحميله على المؤمن له عند تحديد السعر النهائي.

مثال: احسب العلاوة الشهرية المدفوعة مسبقا لتأمين رأس مال عند الحياة إلى سن 67 سنة وذلك باستخدام أعداد التبديلات المرفقة في الملحق. العلاوة تدفع طالما المؤمن له على قيد الحياة ولكن بحد أقصى 67 سنة. علما بأن عمر المؤمن له 42 سنة والمبلغ المؤمن: frs 200000.

الحل

لتكن AP العلاوة السنوية، اعتمادا على مبدأ المعادلة، لدينا فترة تأمين تساوي: 67−42=25 سنة:

$$AP\ddot{a}^{(12)}_{42:\overline{25}|} = 200'000\,{}_{25}E_{42}$$

وهكذا تصبح العلاوة السنوية:

$$AP = \frac{200'000\,{}_{25}E_{42}}{\ddot{a}^{(12)}_{42:\overline{25}|}}$$

نحسب القيم المطلوبة في العبارة:

$${}_{25}E_{42} = \frac{D_{67}}{D_{42}} = 0{,}387215$$

و

$$\ddot{a}^{(12)}_{42:\overline{25}|} = \frac{N_{42}-N_{67}-\frac{11}{24}(D_{42}-D_{67})}{D_{42}} = 16{,}791875$$

وبالتالي:

$$AP = \frac{200'000\times 0{,}387215}{16{,}791875} = 4'611{,}93\ frs$$

وهو ما يعطينا علاوة شهرية تساوي: $\frac{4611{,}93}{12} = 384{,}33\ frs$

(12.3.3) العلاوات الصافية والتجارية

العلاوة التجارية (CP) تساوي العلاوة الصافية زائد مصاريف المؤمن:

(12.3) CP = PP + مصاريف

المصاريف يمكن أن توزع على النحو التالي:

α مصاريف واحدة متناسبة مع رأس المال المؤمن (مثال: عمولة اكتساب).

β مصاريف دورية متناسبة مع العلاوة التجارية (مثال: مصاريف تحصيل).

γ مصاريف دورية متناسبة مع رأس المال المؤمن (مثال: مصاريف إدارية).

مثال: ليكن لدينا تأمين مختلط على رأس مال على أن تتضمن العلاوات السنوية ما يلي: عمولات الاكتساب $\alpha = 2\%$، ومصاريف التحصيل $\beta = 2\%$ وكذلك مصاريف إدارية $\gamma = 0{,}2\%$. أوجد العلاوة التجارية لهذا التأمين.

الحل

بحسب مبدأ المعادلة الفردية نستطيع كتابة ما يلي:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta CP\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$ قاعدة العمل(12.1)

$$CP\ (\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta\ddot{a}_{x:\overline{n}|}) = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$ إظهار

$$CP = \frac{A_{x:\overline{n}|}+\alpha+\gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}\ (1-\beta)}$$ اختزال

بالتعويض عن القيم نحصل على:

$$CP = \frac{A_{x:\overline{n}|}+0{,}02+0{,}02\times\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{0{,}98\times\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

(12.3.4) العلاوات المتدرجة والتي يعاد حسابها سنويا

العلاوات التي يعاد حسابها سنويا هي علاوات تدفع مرة واحدة وهي مخصصة لعقود مدتها سنة واحدة، بينما العلاوات المتدرجة تساوي متوسط العلاوات السنوية التي يعاد حسابها سنويا. المثال الآتي يوضح الفرق بين العلاوتين:

مثال: حدد رأس المال لتأمين مؤقت عند الوفاة مدته 3 سنوات بقيمة 10000€، إذا علمت أن عمر المؤمن له هو 40 سنة، أوجد العلاوة الوحيدة (UP) والعلاوة السنوية (AP) وكذلك العلاوات السنوية التي يعاد حسابها (RAP) باستخدام التبديلات المرفقة في الملحق.

الحل

لنحسب أولا العلاوة الوحيدة ثم العلاوة السنوية:

$UP = {}_{|3}A_{40}$ قاعدة العمل(12.1)

$= 10'000\frac{M_{40}-M_{43}}{D_{40}} = 58{,}531€$ استخدام التبديلات

$AP = \frac{UP}{\ddot{a}_{40:\overline{3}|}}$ حيث $\ddot{a}_{40:\overline{3}|} = \frac{{}_{40}-N_{43}}{D_{40}} = 2{,}90778$

وبالتالي:

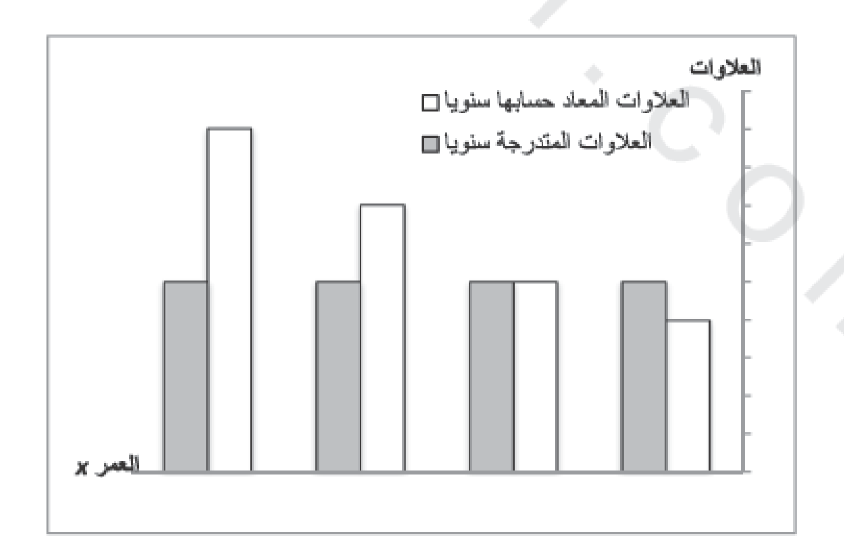
$$AP = \frac{58{,}531}{2{,}90778} = 20{,}13\ €$$

العلاوات التي يعاد حسابها سنويا في السن 40 و41 و42 هي:

$$RAP_{40} = 10'000\frac{M_{40}-M_{41}}{D_{40}} = 10'000q_{40}v = 19.98€$$

$$RAP_{41} = 10'000\frac{M_{41}-M_{42}}{D_{41}} = 10'000q_{41}v = 20.09€$$

$$RAP_{42} = 10'000\frac{M_{42}-M_{43}}{D_{42}} = 10'000q_{42}v = 21.40€$$



(12.3.5) العلاوات المتوسطة

في حالة التأمينات الجماعية (صناديق المعاشات التقاعدية مثلا)، نحسب عادة معدل علاوة موحد لجميع المؤمن لهم، فيمكن مثلا لعلاوة تقدر بـ 8% من راتب كل موظف أن تكون ضرورية لتمويل رواتب التقاعد. لتحديد العلاوة المتوسطة التي تنطبق على جميع المؤمن لهم نستخدم مبدأ المعادلة الجماعية (12.2).

مثال رقم (1): ليكن لدينا مؤمنان لهما من الذكور عمرهما على التوالي 20 و30 سنة، وسن تقاعدهما المرتقب هو 60 سنة. الدخل التقاعدي سوف يساوي 60% من الراتب. ولتمويل ذلك الدخل يقتطع من الراتب علاوات سنوية طالما بقي المؤمن لهما على قيد الحياة وبحد أقصى سن التقاعد.احسب العلاوة المتوسطة السنوية للمجموعة مستعينا بالجدول المرفق وأعداد التبديلات بالملحق:

المؤمن له	الراتب السنوي	العمر	فترة التأمين	الدخل التقاعدي السنوي
x_1	80’000 €	20	40 سنة	48’000 €
x_2	120’000 €	30	30 سنة	72’000 €
Σ	200’000 €			

الحل

المؤمن له	العلاوة	الدخل التقاعدي	n	x	$\ddot{a}_{x:\overline{n}\vert}$	القيمة الحالية للعلاوات	$_{n\vert}\ddot{a}_x$	القيمة الحالية للدخل التقاعدي
x_1	P	€48000	40	20	23,156	23,156P	,8963	€187008
x_2	P	€72000	30	30	16,635	16,635P	,3225	€383184
					Σ	39,791P		€570192

وبالتالي:

$$P = \frac{570192}{39{,}791} = 14329{,}67€$$

وهذه العلاوة السنوية يتم تسديدها من قبل جميع المؤمن لهم وقد تم إيجادها على أساس راتب قاعدي يقدر بـ 200000€. نستطيع الآن تحديد معدل العلاوة الموحدة للمجموعة:

معدل العلاوة = $\frac{14'329{,}67}{200'000} = 0{,}071648 \approx 7{,}16\%$

العلاوة السنوية لأول مؤمن له تقدر بـ:

$$80'000 \times 7{,}16\% = 5'728€$$

والعلاوة السنوية لثاني مؤمن له هي:

$$120'000 \times 7{,}16\% = 8'592€$$

مثال رقم (2): (تكملة للمثال الأول) التحق مؤمنان لهما جديدان إلى المجموعة. الأول عمره 20 سنة ويحصل على راتب سنوي يقدر بـ 80000 €. أما الثاني وعمره 30 سنة فيحصل على راتب سنوي يقدر بـ120000€. ما هي مساهمات هذه الشخصين بعد دخولهما للمجموعة؟

الحل

سوف يدفع المؤمنان لهما الجديدان نفس معدل العلاوة التي يدفعها بقية المؤمن لهم وهي 7,16% من راتبهما السنوي. في المقابل ولتجنب اختلال التوازن المالي للمجموعة، سوف يدفع المؤمن لهما الجدد علاوة واحدة إضافية لتمويل دخولهما للمجموعة. وهكذا نحصل على:

المؤمن الأول الجديد:

- القيمة الحالية للخدمات €187008,0
- القيمة الحالية للعلاوات 80000*16,7%*156,23 €132637,6

المساهمات الإضافية €54370,4

المؤمن الثاني الجديد:

- القيمة الحالية للخدمات €383184,0 .
- القيمة الحالية للعلاوات120000*16,7%*635,16 €142927,9
- المساهمات الإضافية €240256,1 .

ملاحظة: يمكن للمساهمة الإضافية التي تأخذ شكل العلاوة الواحدة الإضافية أن تكون مهمة نسبيا فهي مرتبطة أساسا بعمر المؤمن له عن دخوله المجموعة.

(12.4) تمارين

1- احسب العلاوة السنوية لتأمين مؤقت على رأس مال عند الوفاة يقدر بـ28000€ تقدمت بطلبه إلى شركة تأمين مؤمن لها عمرها 24 سنة ولفترة تساوي 36 سنة. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

2- احسب العلاوة الشهرية لتأمين مؤقت على رأس مال عند الوفاة يقدر بـ28000€ تقدمت بطلبه إلى شركة تأمين مؤمن لها عمرها 24 سنة ولفترة تساوي 36 سنة. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

3- احسب العلاوة السنوية لتأمين مختلط على رأس مال يقدر بـ50000€ لمؤمن لها عمرها 50 سنة ولفترة 15 سنة. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

4- احسب العلاوة السنوية لتأمين مختلط على رأس مال يقدر بـ50000€ لمؤمن لها عمرها 50 سنة ولفترة 15 سنة. العلاوات في هذه المرة تدفع لمدة 10 سنوات فقط. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

5- احسب العلاوة الشهرية لدخل عمري مؤجل يقدر بـ 2000€ لمؤمن له عمره 30 سنة. تدفع العلاوات إلى حين بلوغ المؤمن له سن الحصول على الدخل، أي 65 سنة. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

6- احسب العلاوة السنوية لرأس مال يساوي 100000€ في حالة البقاء على قيد الحياة إلى سن الستين لمؤمن له يبلغ من العمر 25 سنة.تدفع العلاوات إلى حين بلوغ المؤمن له سن الأربعين كحد أقصى. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

7- يرغب زوجان يبلغان من العمر $x = 34, y = 28$ في الحصول على رأس مال يقدر بـ300000 € إذا بقيا الاثنان على قيد الحياة حين يصل x إلى 65 سنة. العلاوات السنوية تدفعها المرأة طالما بقيت على قيد الحياة وبحد أقصى يساوي فترة التأمين. احسب هذه العلاوة السنوية باستخدام جدول أعداد التبديلات المرفق بالملحق.

8- ■ يرغب مؤمن له عمره 45 سنة في تأمين مختلط على رأس مال إلى حين بلوغه سن 65. كما يرغب في الحصول -عند البقاء على قيد الحياة -على ضعف قيمة رأس المال التي يحصل عليها ورثته في حالة وفاته. يستطيع هذا المؤمن دفع علاوة بـ400€ شهريا. ماهو رأس المال الذي سيحصل عليه في سن 65 إذا استخدمنا جدول التبديلات المرفق بالملحق.

9- ■ يدفع مؤمن له عمره 40 عاما علاوة سنوية تبلغ 1600 frs لمدة 20 سنة وذلك مقابل تأمين مختلط. ما هي نسبة الفائدة المستخدمة من قبل الشركة المؤمنة على رأس المال إذا استعملت جدول الوفيات المرفق بالملحق؟ استخدم برنامج 'محلل إكسل' Excel Solver لحل هذا التمرين.

10- احسب باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق، العلاوة التجارية السنوية لتأمين مختلط يبلغ 50000€ تعاقد من أجله مؤمن له يبلغ من العمر 50 سنة ولمدة 15 سنة، علما بأن العلاوات تدفع خلال مدة أقصاها 15 سنة وأن التكاليف الأخرى تتمثل فيما يلي:

- عمولة الاكتساب: 3% من قيمة رأس المال المؤمن.
- مصاريف التحصيل: 2% من العلاوة التجارية السنوية.
- مصاريف إدارية: 0,25% من رأس المال المؤمن يسدد طيلة المدة التي يشملها التأمين.

11- احسب العلاوة السنوية التجارية لرأس مؤمن يبلغ 100000€ في حالة البقاء على قيد الحياة إلى سن الستين لمؤمن له عمره الآن 25 سنة. تدفع العلاوات إلى حين بلوغ المؤمن له سن الأربعين كحد أقصى.استخدم التبديلات المرفقة بالملحق والتكاليف الإضافية التالية:

- عمولة الاكتساب: 2000€ تدفع لموظف التأمينات.
- مصاريف التحصيل والمصاريف الإدارية: 3% من العلاوة التجارية السنوية طيلة كامل فترة التغطية.

12- احسب باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق، العلاوة الواحدة التجارية لدخل عمري سنوي ومؤجل بقيمة frs12000 . إذا علمت أن المؤمن له يبلغ من العمر 50 عاما وأن الدخل يصرف ' ما بعد العد' في سن 65 وأن المصاريف الأخرى هي:

- عمولة الاكتساب: 3% من العلاوة الواحدة التجارية.
- مصاريف إدارية: 2% (ما قبل العد) من قيمة الدخل طيلة فترة التأجيل و2,5% (ما بعد العد) من قيمة الدخل طيلة الفترة المستحقة للصرف.

13- احسب العلاوة السنوية لرأس مال يبلغ €50000 مؤمن على الطريقة المختلطة لمؤمن له عمره 50 سنة ولفترة تأمين بسنتين.ثم احسب العلاوات السنوية التي يعاد حسابها سنويا في 50 و51 سنة. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

14- ■ لتحفيز موظفيها قررت مؤسسة أن تصرف لكل موظف علاوة تشجيع لمدة ثلاثة سنوات. هذه العلاوة المقدرة إجمالا بـ100000 frs سوف تصرف مع الراتب الشهري للموظفين. بالنسبة للمتمرنين تصرف هذه العلاوة لسنة واحدة فقط وهي تساوي 10% من قيمة العلاوة التي تصرف للموظف. وقد قررت الشركة صرف العلاوة بدءا من الشهر القادم ويبلغ عدد الموظفين 30 (متوسط أعمارهم 25 سنة) بينما يوجد في الشركة 4 متمرنين (متوسط أعمارهم 17 سنة).

احسب قيمة العلاوة التي سيحصل عيها الموظفون والمتمرنون مستندا إلى الفرضيات التالية:

(أ) توفر مبلغ العلاوة الإجمالي في صندوق الشركة.

(ب) توفر مبلغ العلاوة الإجمالي في حساب بنكي يوفر 3% سنويا.

(جـ) تستخدم الشركة مبلغ €100000 كعلاوة وحيدة (UP). وتتكفل شركة التأمين بصرف علاوات التشجيع (وهذا يستدعي استخدام التبديلات المرفقة بالملحق).

15- ■ احسب العلاوة السنوية المتوسطة في صورة نسبة مئوية من الراتب لمجموعة الأشخاص التالية وباستخدام أعداد التبديلات المرفقة بالملحق. علما بأن

دخل الشيخوخة المؤمن والذي يصرف ُما قبل العدّ بدءا من عمر 62 عاما يمثل 60% من الراتب.

عمر الدخول	العدد	الراتب السنوي
27	32	€672000
32	39	€1872000
40	29	€1566000
الإجمالي	100	€4110000

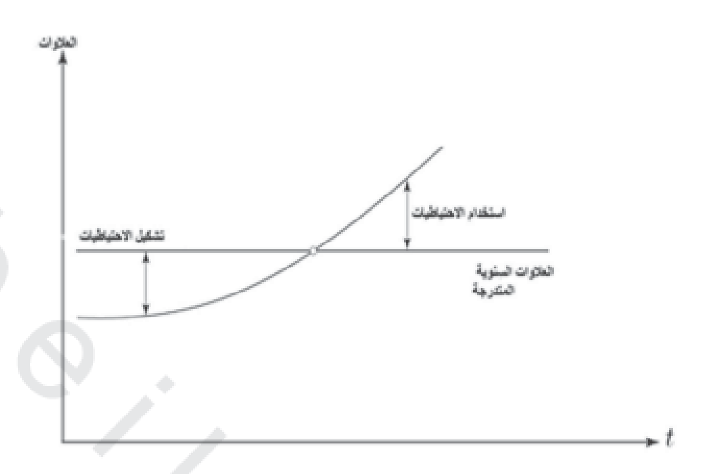
التحقت مؤمن لها عمرها 50 عاما بالمجموعة وبراتب مؤمن عليه يساوي €33000. أوجد العلاوة الوحيدة (تمويل الدخول) التي وجب عليها تسديدها لضمان عدم تغيير التوازن المالي.

الفصل الثالث عشر

احتياطات رياضية

Rèserves Mathèmatiques

عند التعاقد بين مؤسسة تأمينات وأحد عملائها فإن مبدأ المعادلة الفردية ينص على وجوب معادلة القيمة الحالية للمستحقات (الخدمات المقدمة من المؤسسة) مع القيمة الحالية للمدفوعات (العلاوة التي يسددها العميل للشركة). ونفقد هذه العلاقة مباشرة مع دخول التأمين حيز التنفيذ. عندئذ لا يوجد تعادل بين العلاوات السنوية والخطورة السنوية، حيث يدفع صاحب بوليصة التأمين نفس العلاوات المتدرجة طيلة مدة العقد بينما يتعرض هذا الأخير إلى تطور غير محسوب لمخاطر الصرف من قبل المؤمن. في هذه الحالة واعتبارا لهذا الفارق الذي يفصل بين المؤمن والمؤمن له فإن المؤمن مطالب بتكوين احتياطي رياضي يسمى كذلك كفالة التغطية. ويسعى المؤمن من خلاله إلى تنفيذ جميع التزاماته المستقبلية. فهو يقوم –إذن– بدور إحمائي. وتوجد شروط قانونية عند إنشاء شركات التأمين تتعلق باستثمار الاحتياطي الرياضي مما يجعل من هذه الاستثمارات وسيلة لضمان الملاءمة (القدرة على الاستيفاء بالتعهدات).



الرمز:

$_tV_x$:احتياطي رياضي على علاوة صافية في الزمن t .

يمكن حساب الاحتياطي الرياضي باستخدام الطريقة الاستكشافية. وهو يساوي القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية بعد طرح القيمة الحالية للعائدات المستقبلية، أي يمكن أن يكتب على النحو التالي:

$$_tV_x = \text{القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية} - \text{القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية} \tag{13.1}$$

لنحاول من خلال المثال الآتي فهم مبدأ الاحتياطي الرياضي:

مثال: ليكن لدينا عقد تأميني يستوجب تسديد العلاوات السنوية طيلة 5 سنوات. يستحق المؤمن له الذي يبلغ من العمر 40 سنة من خلال هذا العقد رأس مال يقدر بـ 1000€ إذا بقي على قيد الحياة بعد 10 سنوات. احسب باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق الاحتياطي الرياضي الذي يسبق مباشرة العلاوة الثالثة وذلك بافتراض ما يلي:

(أ) الفائدة و الوفيات لا تندرجان ضمن العمليات الحسابية.

(ب) الفائدة فقط ونسبتها 3% هي التي تندرج ضمن العمليات الحسابية.

(جـ) الفائدة والوفيات تندرجان ضمن العمليات الحسابية.

الحلول:

الحالات الثلاث يمكن تمثيلها على النحو التالي:

(أ) مبدأ المعادلة : 1'000=5 AP ⇒1 AP = 200€

وهكذا نحصل مباشرة قبل العلاوة الثالثة على:

القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية: 600€ = 200+200+200

القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية:1'000€ وبالتالي:

$${}_3V_{40} = 1'000 - 600 = 400€$$

(ب) مبدأ المعادلة: $1'000v^{10} = AP\ddot{a}_{\overline{5|}}$

$$\Rightarrow AP = \frac{1'000v^{10}}{\ddot{a}_{\overline{5|}}} = 157{,}74€$$

وهكذا نحصل مباشرة قبل العلاوة الثالثة على:

القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية: $AP\ddot{a}_{\overline{5|}} = 459{,}58€$

القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية: $1'000v^7 = 813{,}09\ €$ وبالتالي:

$${}_3V_{40} = 813{,}09 - 459{,}58 = 353{,}51€$$

(جـ) مبدأ المعادلة: $1'000\,{}_{10}E_{40} = AP\ddot{a}_{40:\overline{5|}}$

$$\Rightarrow AP = \frac{1'000\,{}_{10}E_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{5|}}} = 154{,}06\ €$$

وهكذا نحصل مباشرة قبل العلاوة الثالثة على:

القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية: $AP\ddot{a}_{42:\overline{3|}} = 447{,}86€$

القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية: $1'000\ {}_8E_{42} = 770{,}98\ €$ وبالتالي:

$${}_3V_{40} = 770{,}98 - 447{,}86 = 323{,}12€$$

ملاحظات:

- في بداية التعاقد الاحتياطي الرياضي يساوي صفر؛ لأن المخاطر المستقبلية متساوية مع العلاوات المستقبلية.
- العقود ذات العلاوات الوحيدة (UP) لها احتياطي رياضي ممثل من خلال القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية فحسب، حيث إنه لا توجد علاوات للتحصيل في المستقبل.
- وأخيراً فإن العقود التي تتضمن علاوات سنوية يعاد حسابها سنويا (RAP) لا تتطلب احتياطيا رياضيا؛ لأن المعادلة بين العلاوة والمخاطرة المؤمنة تتحقق في كل سنة.

(13.1) احتياطات رياضية لتركيبات كلاسيكية

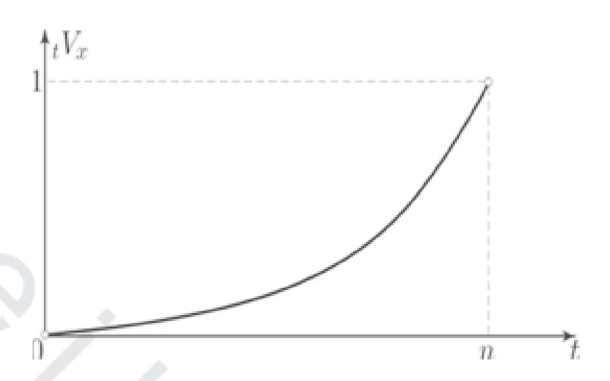
نكتفي في هذه الفقرة بتقديم القواعد المستخرجة من الطريقة الاستكشافية والمطبقة على التركيبات الكلاسيكية للتأمين. لكل تركيبة نقدم رسما بيانيا يوضح التطور في الاحتياطي الرياضي حسب الزمن إلى حين انتهاء فترة التعاقد n.

(13.1.1) رأس مال في حالة البقاء على قيد الحياة لعلاوات سنوية

القاعدة

$$ {}_tV_x = {}_{n-t}E_{x+t} - AP\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad (13.2)$$

الرسم البياني

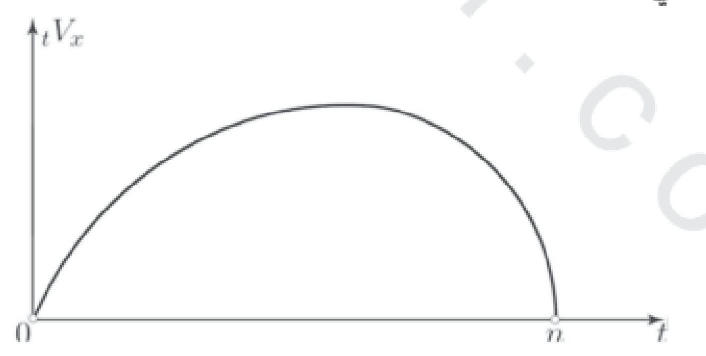


(13.1.2) رأس مال مؤقت عند الوفاة ولعلاوات سنوية

القاعدة

$$ {}_tV_x = {}_{|n-t}A_{x+t} - AP\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad (13.3)$$

الرسم البياني

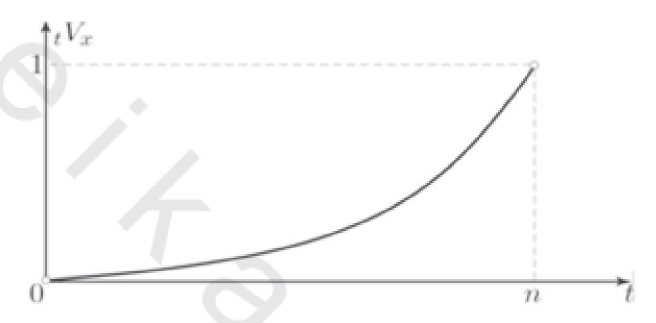


(13.1.3) تأمين مختلط لعلاوات سنوية

القاعدة

$$ {}_tV_x = A_{x+t:\overline{n-t|}} - AP\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \tag{13.4} $$

الرسم البياني

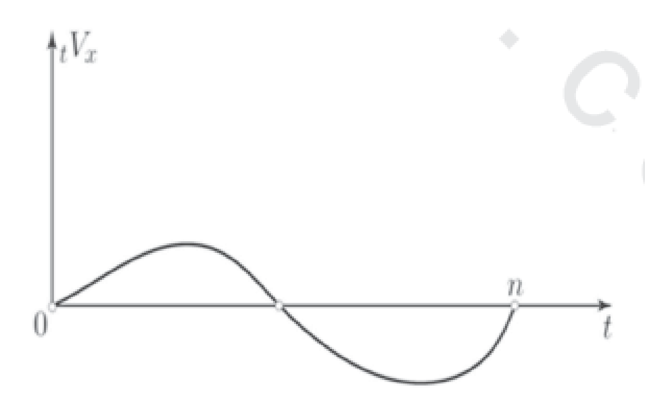


(13.1.4) دخل مؤقت للبقاء على قيد الحياة ولعلاوات سنوية

القاعدة

$$ {}_tV_x = \ddot{a}_{\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{\overline{n|}}\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{13.5} $$

الرسم البياني



(13.1.5) دخل عمري مؤجل لعلاوات سنوية جارية

القواعد

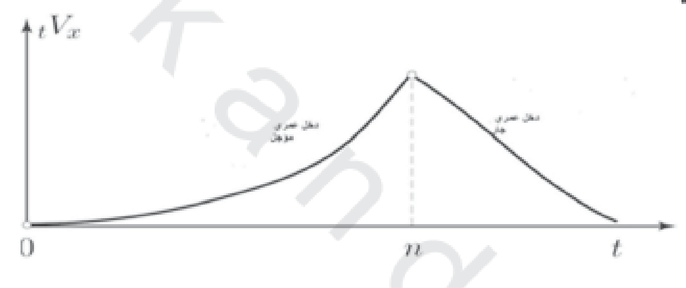
دخل عمري مؤجل

$$ {}_tV_x = {}_{n-t|}\ddot{a}_{x+t} - AP\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad (13.6)$$

دخل عمري جاري

$$ {}_tV_x = \ddot{a}_{x+t} \qquad (13.7)$$

الرسم البياني



(13.2) احتياطي رياضي على العلاوات التجارية

يجب على المؤمن أن يأخذ في الاعتبار المصاريف المستقبلية عند احتسابه للاحتياطيات الرياضية. وبذلك فإن قاعدة الاحتياطي الرياضي على العلاوة التجارية تحرر على النحو التالي:

(13.8)

$_tV_x{}^{CP}$ = القيمة الحالية للالتزامات المستقبلية

+القيمة الحالية للمصروفات المستقبلية

-القيمة الحالية للعلاوات المستقبلية

نعرف كذلك الاحتياطي الرياضي لـ "زيلمار" Zillmer (أكتواري ألماني عاش في الفترة1831–1893) بطرح الحصة المتناسبة وغير المستهلكة في عمولة الاكتساب من العبارة ${}_tV_x^{CP}$. فنحصل بالتالي على:

$$ {}_tV_x^{Zillmer} = {}_tV_x^{CP} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} \qquad (13.9)$$

تمثل الاحتياطيات الرياضية في نهاية الأمر الدين المستحق من المؤمن إلى المؤمن له. وهذا الأخير يمكنه –جدلا– الحصول على هذا الاحتياط الرياضي في حال قرر وضع حد للعقد المبرم بينه وبين المؤمن. وهو ما يسمى باسترجاع البوليصة (إعادة شرائها). في هذه الحالة، يتم احتساب احتياطي زيلمار Zillmer كما نستخدمه كذلك إذا قرر المؤمن له تأمين رأس مال أقل دون إلغاء البوليصة تماما ونتحدث في هذه الحالة عن تخفيض.

مثال: لدينا المعطيات التالية لعقد تأمين:

تأمين مختلط لعلاوات سنوية. رأس المال المؤمن: 20000 frs، $x = 35, n = 15$. كما تعرفنا على:

- عمولة الاكتساب: $\alpha = 3{,}5\%$.
- مصاريف التحصيل: $\beta = 2\%$.
- مصاريف إدارية: $\gamma = 0{,}25\%$.

افترض أن المؤمن له رفض تسديد العلاوة الحادية عشر، مما اضطر المؤمن إلى اقتراح لخفض رأس ماله المؤمن. أوجد رأس المال المؤمن الجديد (المخفض) باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق.

الحل

نبدأ أولا بحساب العلاوة التجارية (CP) بحسب مبدأ المعادلة (12.1) ولرأس مال وحدة. نحصل على:

$$A_{35:\overline{15|}} + 0{,}035 + 0{,}02CP\ddot{a}_{35:\overline{15|}} + 0{,}0025\ddot{a}_{35:\overline{15|}} = CP\ddot{a}_{35:\overline{15|}}$$

يتم تجميع العبارات التي تحتوي على CP لكي نحصل على :

$$CP = \frac{A_{35:\overline{15|}}+0{,}035+0{,}0025\ddot{a}_{35:\overline{15|}}}{\ddot{a}_{35:\overline{15|}}\,(1-0{,}02)}$$

بعد القيام بحساب القيم الحالية نجد:

$$CP = \frac{0{,}64638+0{,}035+0{,}0025\times 12{,}14096}{12{,}14096\,(1-0{,}02)} = 0{,}059819$$

إذا كان رأس المال المؤمن يبلغ 20000 frs فإننا نحصل على:

$$CP = 20'000 \times 0{,}059819 = 1196{,}38\,frs$$

وبالتالي نكتب الاحتياط الرياضي قبل العلاوة الحادية عشر على النحو التالي:

$${}_{10}V_{35}{}^{CP} = A_{45:\overline{5|}} + 0{,}02CP\ddot{a}_{45:\overline{5|}} + 0{,}0025\ddot{a}_{45:\overline{5|}} - CP\ddot{a}_{45:\overline{5|}} = 0{,}600209$$

ولرأس مال مؤمن يقدر بـ$frs20000$ نحصل على:

$${}_{10}V_{35}{}^{CP} = 20'000 \times 0{,}600209 = 12'004{,}18\,frs$$

نستطيع بذلك حساب احتياط زيلمار Zillmer :

$${}_{10}V_{35}{}^{Zillmer} = {}_{10}V_{35}{}^{CP} - \frac{\alpha}{\ddot{a}_{35:\overline{15|}}}\ddot{a}_{45:\overline{5|}} = 0{,}586689$$

إذا كان المبلغ المؤمن يساوي $frs20000$ نحصل على:

$${}_{10}V_{35}{}^{Zillmer} = 20'000 \times 0{,}586689 = 11'733{,}78\ frs$$

يستخدم احتياطي زيلمار Zillmer لتمويل تأمين مختلط لرأس مال مخفض (C)في شكل علاوة وحيدة، وهو المقدار الذي وجب إيجاده. وهذا التأمين الجديد لا يتضمن مصاريف التحصيل (β) ولا عمولة الاكتساب (α). وبالتالي يكتب مبدأ المعادلة:

$${}_{10}V_{35}{}^{Zillmer} = UP = CA_{x+t:\overline{n-t|}} + C\gamma \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

وهي المعادلة التي تمكننا من إيجاد C:

$$C = \frac{{}_{10}V_{35}{}^{Zillmer}}{A_{45:\overline{5|}} + 0{,}0025\ddot{a}_{45:\overline{5|}}} = 0{,}670402$$

وهذا يمكن في الأخير المؤمن له من إمكانية الحصول على المبلغ (رأس المال):

$$C = 20'000 \times 0{,}670402 = 13'408{,}04\ frs$$

(13.3) تمارين

1- أوجد العلاوة السنوية لتأمين مؤقت عند الوفاة على رأس مال بلغ 28000 € لفائدة مؤمن لها عمرها 24 سنة ولفترة تأمين بـ 36 سنة، ثم احسب الاحتياط الرياضي عند سن 40 عاما. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

2- أوجد العلاوة الشهرية لتأمين مؤقت عند الوفاة على رأس مال بلغ 150000 € لفائدة مؤمن لها عمرها 24 سنة ولفترة تأمين بـ 36 سنة. ثم احسب الاحتياط الرياضي عند سن 40 عاما. استخدم أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

3- احسب العلاوة السنوية لتأمين مختلط على رأس مال يقدر بـ50000 frs لصالح مؤمن لها عمرها 50 سنة ولفترة تأمين مدتها 15 سنة. احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي عند سن 64 عاما مستخدما أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

4- احسب العلاوة السنوية لتأمين مختلط على رأس مال يقدر بـ50000 frs لصالح مؤمن لها عمرها 50 سنة ولفترة تأمين مدتها 15 سنة. علما بأن العلاوات تدفع بحد أقصى لفترة 10 سنوات، احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي عند سن 60 عاما مستخدما أعداد التبديلات المرفقة بالملحق.

5- احسب العلاوة الشهرية لدخل عمري مؤجل يقدر بـ2000 € شهريا ما قبل العدّ لفائدة مؤمن لها عمرها 30 سنة. تبقى العلاوات موجبة على المؤمن لها إلى حين بلوغها سن التقاعد، أي في عمر 65 سنة. احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي في سن 40 سنة مستخدما أعداد التبديلات المرفقة في الملحق.

6- احسب العلاوة السنوية لرأس مال عند البقاء على قيد الحياة إلى حين بلوغ 60 سنة يقدر بـ 100000 frs لفائدة مؤمن له عمره 25 سنة. تبقى العلاوات موجبة على المؤمن له إلى حين بلوغه 40 سنة. احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي في سن 40 سنة مستخدما أعداد التبديلات المرفقة في الملحق.

7- يرغب زوجان $x = 34$ و $y = 28$ في الحصول على رأس مال قدره 300000 € إذا بقيا على قيد الحياة حين يبلغ x 65 سنة. تدفع العلاوات من قبل المرأة طالما بقيت على قيد الحياة ولمدة أقصاها فترة التأمين. احسب هذه العلاوة السنوية مستخدما أعداد التبديلات المرفقة بالملحق. احسب بعد ذلك الاحتياط الرياضي عند بلوغ x 40 سنة.

8- ■ باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق أوجد ما يلي:

(أ) العلاوة السنوية (AP) التجارية لتأمين مختلط بقيمة 50000 frs لفائدة مؤمن له عمره 50 سنة ولمدة 15 سنة.

(ب) الاحتياط الرياضي لعلاوة تجارية في سن 55 عاما.

(جـ) الاحتياط الرياضي لزيلمارZillmer في سن 55 عاما.

تدفع العلاوات بحد أقصى لمدة 10 سنوات وتكون المصاريف الأخرى كالآتي:

- عمولة الاكتساب: 3% من قيمة رأس المال المؤمن.
- مصاريف التحصيل: 2% من العلاوة التجارية السنوية طيلة فترة سداد العلاوات.
- مصاريف إدارية: 0,25% من قيمة رأس المال المؤمن تسدد طيلة الفترة التي تشملها التغطية.

9- ■ باستخدام التبديلات المرفقة بالملحق، ولمؤمن له عمره 50 سنة تعاقد على بوليصة تأمين دخل عمري قدره 12000 frs يصرف ما بعد العد في سن 65 سنة، احسب ما يلي:

(أ) العلاوة التجارية المتدرجة والمسددة إلى حين بلوغ 65 عاما.

(ب) الاحتياط الرياضي على علاوة تجارية قي ست 55 عاما.

(جـ) الاحتياط الرياضي في سن 70 سنة دون رسوم.

تدفع العلاوات بحد أقصى لمدة 10 سنوات وتكون المصاريف الأخرى كالآتي:

- مصاريف التحصيل: 2% من العلاوة التجارية السنوية طيلة فترة سداد العلاوات.
- مصاريف إدارية: 2% من قيمة الدخل المؤمن تسدد طيلة فترة التأجيل و2,5% من قيمة الدخل المؤمن تسدد طيلة فترة خدمة الدخل.

10- ■ ليكن لدينا تأمين مختلط يقدر بـ35000 € لفائدة مؤمن لها عمرها 30 سنة ولمدة 15 سنة. إذا علمت أن نسب المصاريف كانت كالآتي:

- عمولة الاكتساب: 3,5% من رأس المال المؤمن.

- مصارف التحصيل: 2% من العلاوة التجارية السنوية.
- مصاريف إدارية: 0,15% من رأس المال المؤمن تدفع طيلة سداد العلاوات.

استخدم التبديلات المرفقة بالملحق لإيجاد:

(أ) العلاوة التجارية المتدرجة التي تسدد طيلة كامل فترة التعاقد.

(ب) عند نهاية السنة العاشرة من التعاقد، الاحتياط الرياضي على علاوة تجارية، وكذلك الاحتياط الرياضي لزيلمار ~Zillmer .

(جـ) رأس المال المخفض، إذا علمنا أنه بداية من السنة الحادية عشر توقف سداد العلاوات.

(د) العلاوة التجارية الجديدة إذا انخفض رأس المال المؤمن بداية من السنة الحادية عشر لفترة التأمين ليصبح 30000 €.

الباب الثالث

أساسيات البرمجة

- الفصل الرابع عشر: البرمجة باستخدام في بي أي VBA و تي آي– بيسك TI-BASIC
- الفصل الخامس عشر: تطبيقات حاسوبية

الفصل الرابع عشر

البرمجة باستخدام في بي أي و تي آي بيسك
Programmation (VBA) et TI-Basic

نستعرض في الفصل الحالي أهم القواعد المستخدمة في هذا الكتاب تحت مظلة البرمجة VBA (Visual Basic Application) وكذلك البرمجة باستخدام TI-83 Plus، حتى يتمكن القارئ أو الطالب من استيعاب الكود البرمجي المدرج في هذا الفصل لكي يبرمج بسهولة بعض الدوال المالية والأكتوارية المناسبة لاحتياجاته. لكن يجب عليه تجنب برمجة بعض الدوال الموجودة على إكسل أو على تي-83. كمثال على ذلك يمكن إعداد جدول تبديلات داخل ورقة إكسل حيث يظهر فيها ويحسب من خلالها العبارات...إلخ، ولا حاجة هنا إلى برمجة أي من الدوال المالية أو الأكتوارية، بينما إذا كانت مؤسستك تستخدم نظام حساب الأعمار بالشهر المكتمل (انظر الفقرة (1.3)) فهذا يتطلب منك برمجة قاعدة صغيرة، تحت مسمى Assuredage (x) داخل إكسل قصد تسهيل العمل. ولهذا السبب تبدو دراسة هذا الفصل في غاية الأهمية.

(14.1) البرمجة داخل إكسل في بي أي Excel VBA

لبرنامج إكسل خاصيتان في البرمجة: الأولى تمكن من برمجة الدوال التي تحتاجها وربطها بورقة عمل محددة وهذه الدوال لا يمكن استخدامها إلا عند فتح

هذه الورقة، أما الخاصية الثانية فهي تتمثل في تحويل ورقة عمل الإكسل إلى ماكرو تكميلي XLA وهو ما يمكن من إدراج دوال إضافية على البرنامج. وحينها تصبح هذه الدوال متوفرة لجميع أوراق العمل التي فتحها في إكسل.

سواء استخدمنا الخاصية الأولى أو الثانية فإن الأسلوب المتبع للاستفادة من هذه الوسائل سيبقى مماثلا في كلتا الحالتين؛ فالدوال المخصصة يجب في البداية كتابتها داخل وحدة:أدوات/ ماكرو/ محرر الفيجوال بيسك/ إدراج/ وحدة (بالنسبة لأوفيس 2003) ومن قائمة عرض/ وحدات الماكرو/ عرض وحدات الماكرو/ تحرير (بالنسبة لأوفيس 2007).

افترض الآن أننا نريد كتابة دالة نسترجع من خلالها متوسط أعمار شخصين، ولتحقيق ذلك نكتب داخل محرر الوحدة ما يلي:

```
(x ; y) Meanage Function
2 /(x+y) =Meanage
End Function
```

نغلق بعد ذلك محرر الوحدة (Alt+Q) ثم نفتح ورقة إكسل جديدة ونختار من قائمة إدراج/ دالة ثم مخصصة (بالنسبة لأوفيس 2003) أو من قائمة صيغ ثم إدراج دالة ثم "أو تحديد دالة" حدد "معرفة من قبل المستخدم" فنجد أن الدالة تظهر في القائمة:

إدراج دالة
البحث عن دالة:
اكتب وصف مختصر لما تريد أن تفعل ثم انقر فوق "انتقال"
إنتقال
أو تحديد فئة: معرفة من قبل المستخدم
تحديد دالة:
meanage
meanage(x;y)
التعليمات غير متوفرة.
تعليمات حول هذه الدالة
موافق
إلغاء الأمر

بهذه الطريقة تستطيع إنشاء كل ما تحتاجه من دوال مخصصة حيث يتم إدراجها في ورقة الإكسل المفتوحة أمامك، أما إذا كنت ترغب في الاحتفاظ بهذه الدوال في برنامج إكسل فيجب حفظ ورقة الإكسل باستخدام الامتداد *.xla وهذا يؤدي إلى إنشاء ماكرو تكميلي في إكسل ولتثبيت هذا الماكرو نتبع الخطوات:أدوات/ ماكرو تكميلي/ استعراض...

(ديجيلكس) شركة ذات مسؤولية محدودة (ومؤلف هذا الكتاب هو صاحب هذه الشركة) تقوم بتطوير مثل هذه الماكرو التكميلية والتي توفر أيضا:

- مسمى صنف خاص. مثال: <MATHFIN>.
- وسيلة دعم ومساندة لكل دالة.
- تحميل تلقائي لكل ماكرو تكميلي.

لمزيد من الاطلاع حول هذا الموضوع يمكنك تصفح الموقع www.digilex.com حيث يمكنك تحميل البرنامج ACTUXL الذي سنتطرق إليه في الفصل القادم.

(14.2) الدوال الأساسية

في هذه الفقرة سوف نقدم بعض الدوال المستخدمة في برنامج ACTUXL يمكن للقارئ أن يستمد منها بعض الأفكار لإنشاء دوال خاصة به:

```
Function DAYS (Date1 As Date ،Date2 As Date ،Optional Base
As Variant( As Integer
If IsMissing (Base( Then Base' 0 = European Method by default
If Base 0 = Then' Base 360 /30 European Method
```

```
D1 = Day (Date1) : M1 = Month (Date1) : Y 1 = Year (Date1) D2 =
Day (Date2) : M2 = Month (Date2) : Y2 = Year (Date2) If J1 = 31
Then D1 = 30 : If D2 = 31 Then D2 = 30
DAYS = (J2 - J1) + 30 * (M2 - M1) + 360 * (A2 - A1) '1.1
End If


If Base 1 = Then' Base360 /30  German method

D1= Day (Date1) : M1 = Month (Date1) : Y1 = Year (Date1) D2=
Day (Date2) : M2 = Month (Date2) : A2 = Year (Date2)
If D1 = 31 Then D1 = 30 : If D2 = 31 Then D2 = 30

If (D1 = 28 And M1 = 2And Y1 Mod 4= 0) Then D1 = 28
If (D2 = 28 And M2 = 2And Y2 Mod 4= 0) Then D2 = 28

If (D! = 29 And M1 = 2And Y1 Mod 4= 0) Then D1 = 30
If (D2 = 29 And M2 = 2And Y2 Mod 4= 0) Then D2 = 30

If (D1 = 28 And M1 = 2And Y1 Mod 4<> 0) Then D1 = 30
If (D2 = 28 And M2 = 2And Y2 Mod 4<> 0) Then D2 = 30
DAYS = (D2 – D!) + 30 * (M2 - M1) + 360 * (Y2 - Y1) '1.1
End If
If Base = 2Then ' exact Base /365
D1 = Day (Date1) : M1 = Month (Date1) : Y1 = Year (Date1)
D2 = Day (Date2) : M2 = Month (Date2) : Y2 = Year (Date2)
If M1 <= 2Then 'Formula 1.2
D1 = 365 * (Y1 -1) + Int ((Y1 -1) /4) - Int ((Y1 -1) /100)
+ Int ((Y1 -1) /400) + 31 * (M1 -1) + D1
Else 'Formula 1.3
D1 = 365 * (Y1 -1) + Int (Y1 /4) - Int (Y1 / 100)
+ Int (Y1 /400)+ 31 * (M1 -1)+ D1 - Int (0.4 * M1 + 2.2)
End If

If M2 <= 2Then 'Formula 1.2
D2 = 365 * (Y2 -1) + Int ((Y2 -1) /4) - Int ((Y2 -1) /100)
+ Int ((Y2 -1) /400) + 31 * (M2 -1) + D2
Else 'Formula 1.3
D2 = 365 * (Y2 -1) + Int (Y2 /4) - Int (Y2 / 100)
+ Int (Y2 /400)+ 31 * (M2 -1) + D2 - Int (0.4 * M2 + 2.2)
End If
```

```
DAYS = D2 - D1
End If
End Function

' Convert a year on years, months, days
Function CONVERTYMD (Year As Double) As String 'formula 1.7
Y= Int (Year)
m= Int (12 * (Year - Y))
D= Int (30 * (12 * (Year - Y) - m))
CONVERTYMD = Y & "year (s) /" & m & "month /" & D & "Day (s)"
End Function

' Calculates the average rate of simple interest investments
Function SIMPLE INTEREST RATE (Table As Range) As Double
'for- mule 2.9
t= 1
While (Table.Cells (t, 1) <> "")
t= t+
1
Wend
k= t-1 'investments number

Numerator = 0
For t= 1 To k
Numerator = Numerator + Table.Cells (t, 1) * Tab.Cells (t,
2) * Table.Cells (t, 3) / 360
Next t

Denominator = 0
For t= 1 To k
Denominator = Denominator + Table.Cells (t, 1) * Table.Cells (t,
2) / 360
Next t
SIMPLEINTEREST_RATE = Numerator / Denominator
End Function

'Calculates the futur value according to the method of compound interest

Function COMPOUND_CN (c0, i, n) 'formula 3.1
```

```
COMPOUND_CN = c0 * (1 +
i)^n
End Function

' Calculates the present value of an annuity unit postnumerando
Function POSTAN (i As Double, n, Optional m As Variant)
If IsMissing (m) Then m= 1 'annual annuity defaulf
i= (1 + i) ^(1 / m) - 1 'i recalculated according to the choice of m
n= m* n'recalculation of the length according to choice of m
v= 1 / (1 + i)
If i= 0 Then
POSTAN = n/ m
Else 'use of the formula 4.3
POSTAN = (1 - v^n) / i* 1/m
End If
End Function

' Calculates the remaining principal of a loan
' for the fixed term (shape=0), constant depreciation (shape =1)
' or the constant annuity (shape =[2])

Function CK (C As Double, i As Double, n As Integer, k As In- teger,
Optional shape As Variant) As Double
If IsMissing (shape) Then shape = 2 'loan by constant annuity
If shape = 0 Then 'fixed term
CK = C'formula 5.2
End If
If shape = 1 Then 'constant depreciation
CK = (n - k+ 1) * C/n'formula 5.6
End If
If shape = 2 Then 'constant annuity
CK = C/POSTAN (i, n) * POSTAN (i, n- k+ 1) 'formula 5.11
End If
End Function

'opening qx
Sub openqx () 'dialog box open
With Application.FileDialog (msoFileDialogOpen)
.Filters.Clear 'clears the existing formats
.Filters.Add "Tables", "*.qx" 'adds Tables et filter qx
```

```
.AllowMultiSelect = False 'not multi files selectables
If .Show = False Then Exit Sub
fichierqx = .SelectedItems (1) 'affects the way the file qx
End With
For t= 0 To 140
qx (t) = 0
Next t


'opens the file and completed the table called man qx
Open fichierqx For Input As #1
t = 0
Do While aux <> 1000
Input #1, aux
qx (t) = aux / 1000 t = t+ 1
Loop
Close #1

'détermines the final value of the table
t= 50 'arbitrary value
While qx (t) > 0'détermination of omega
t= t+ 1
Wend
omega = t-1
qx (omega) = 1 t = 50
While qx (t) > 0'determination of alpha, the first table value
t= t-1
Wend
alpha = t+ 1
lx (0) = 100000 'recalculation of lx
For t= 0 To alpha lx (t)
= 100000
Next t
For t= alpha + 1 To omega
lx (t) = lx (t-1) * (1 - qx (t-1))
Next t
lx (omega+1) = 0

' Returns the life expectancy for an insured aged x
```

```
'of the table X calculated according to the shortened life expectancy
(method=0),
' average life expectancy (method=[1]) or
' complete life expectancy (method=2)

Function EX (x, Optional method As Variant)
If IsMissing (method) Then method = 1average life expectancy If method =
0Then 'formula 7.9
temp = 0
For t= 1To omega - x'omega=dernier âge de la table X
temp = temp + lx (x + t)
Next t
EX = temp / lx (x)
End If

If method = 2Then 'formula 7.10
temp = 0
For t= 0To omega - x
temp = temp + lx (x + t)
Next t
EX = temp / lx (X)
End If

If methode = 1Then 'formule 7.11
temp = 0
For t= 0To omega – x
temp = temp + lx (x + t) Next t
EX = (temp / lx (x)) - 0.5
End If
End Function

' Present value of life temporary annuity
' praenumerando (deffered [k])' payable fraction [m]
' according to table X. By défault, k=0 and m=1
' using the formula 11.6
Function Praeaxn (x, n, Optional k, Optional m) If
IsMissing (k) Then k= 0'not deferred
If IsMissing (m) Then m= 1'annuity
Praeaxn = Nex (x, k) * (Nx (x + k) - Nx (x + k+ n) - (m-1) /(2
```

```
* m) * (Dx (x + k) - Dx (x + k+ n))) / Dx (x + k) End
Function

' Present value of lifetime capital on death
' (deferred [k]) according to the table X. By défault,
k=0

Function AX (x, Optional k)
If IsMissing (k) Then k= 0'Not deferred
AX = Mx (x + k) / Dx (x)
End Function

' Registration commutations in Dx (), Nx (), ...
' for lx () already registered, omega and i
knew

For t= 0To omega
Dx (t) = lx (t) * (1 + i) ^-t
Next t

For t= 0To omega
Nx (t) = 0
For u= tTo omega
Nx (t) = Nx (t) + Dx (u) Next u
Next t

For t= 0To omega
Cx (t) = (lx (t) - lx (t + 1)) * (1 + i) ^- (t + 1) Next t
```

(14.3) البرمجة باستخدام الآلة الحاسبة TI-83 Plus

توجد لغتان للبرمجة يمكن استخدامهما لبرمجة الآلة TI-83 Plus:

assembly z80 و Basic–TI .

لغة البرمجة TI-Basic

تمتاز هذه اللغة بالقوة والسهولة في التعلم والفهم. ويوجد خيارات للكتابة: إما التحرير مباشرة على الآلة، وإما تحرير الأوامر على الحاسب الآلي ثم

إرسالها إلى الآلة الحاسبة. البرامج بلغة Basic–TI تعتبر عموما أكثر بطئا من البرامج المكتوبة بلغة assembly ويرجع هذا إلى طريقة القراءة التي تتبعها الآلة فهي تقرأ الأوامر سطرا تلو الآخر.

لغة البرمجة assembly

هذا البرنامج يسمى كذلك asm هو من أقل البرامج كفاءة في استخدامه لبرمجة المعالج، حيث إن البرامج التي تحرر باستخدام asm تستطيع النفاذ إلى مناطق محظورة في ذاكرة المعالج.

في المقابل فإن البرامج asm تدور بسرعة أكبر من مثيلاتها بلغة Basic–TI؛ لأن هذه البرامج مصنفة على أنها برامج أصلية للآلة الحاسبة.

استخدمنا لغة البرمجة TI-Basic لتطوير تطبيقين يمكن تحميلهما مجانا من الموقع www.digilex.ch. الفقرة التالية توضح بعض الدوال المستخدمة في هذه التطبيقات الحاسوبية.

(14.4) أهم الدوال

تعد عملية حساب التبديلات بطيئة باستخدام الآلة الحاسبة TI–83. ولتسريع هذه العملية نستطيع تعريف إجراءات ملء الجداول من خلالها حلقة واحدة إذا انطلقنا من العلاقة التالية:

$$N_x = N_{x+1} + D_x \qquad (14.1)$$

و

$$M_x = M_{x+1} + C_x \qquad (14.2)$$

```
'Formulas 14.1 et14.2

LLX (108)* (1+J)^ (-108)→LDX
(108) LDX (108)→LNX (108)
LLX (108)* (1+J)^ (-109)→LCX
(108) LCX (108)→LMX (108)

For (I,107,1,-1)
LLX (I)* (1+J)^ (-I)→LDX
(I)     LNX     (I+1)+LDX
(I)→LNX (I)
 (LLX (I)-LLX (I+1))* (1+J)^ (-I-1)→LCX (I)
LMX (I+1)+LCX (I)→LMX (I)
End

 'Calculation of age to the day - Formulas 1.2 et 1.3

Input "Day0 [DD]=",D
Input "Month0 [MM]=",M
Input "Year0 [YYYY]=",Y
Input "Day1 [DD]=",K
Input "Month1 [MM]=",N
Input "Year1 [YYYY]=",B

If M=2
Then
365* (A-1)+ent ((A-1)/4)-ent ((A-1)/100)
+ent ((A-1)/400)+31* (M-1)+J→D
Else
365* (A-1)+ent (A/4)-ent (A/100)
+ent (A/400)+31* (M-1)+J-ent (0.4*M+2.2)→D
End

If N=2
Then
365* (B-1)+ent ((B-1)/4)-ent ((B-1)/100)
+ent ((B-1)/400)+31* (N-1)+K→E
Else
365* (B-1)+ent (B/4)-ent (B/100)+ent (B/400)
```

```
+31* (N-1)+K-ent (0.4*N+2.2)→E
End
 (E-D)/365→X
Disp "Age=",X
```

'Calculate the futur value with compound interests - Formula 3.1

```
Input "C0=",C
Input "i percent=",I
Input "n years=",N
I/100→I
C* (1+I)^N→X
Disp "Cn=",X
```

'Present value of annuity certain postnumerando - Formula 4.3

```
Input "i percent=",I
Input "duration=",N
Input "Fraction m=",M
I/100→I
 (1+I)^  (1/M)-1→I
M*N→N
1/ (1+I)→V
If I=0
Then
N/M
→X
Else
 (1-V^N)/I*1/M→X
End
Disp "Val.act=",X
```

'Shortened life expectancy- Formula 7.9

```
Input "Age=",A
0→T
For (J,A+1,108)
T+LLX
(J)→T
T/LLX
(A)→X
End
Disp "ex=",X
```

الفصل الخامس عشر

تطبيقات حاسوبية

Applications Informatiques

نحيط الطلبة والمستخدمين علما بأننا طورنا برمجيتين حاسوبيتين بالإمكان تحميلهما من خلال الموقع:www.digilex.ch . البرمجية الأولى هي عبارة عن ماكرو تكميلي لإكسل وقد تم التطرق إليها في الفصل 14. والبرمجية الثانية هي تطبيق على لغة البرمجة TI-Basic يمكن استخدامه في الآلة الحاسبة TI–83 Plus. وهذه البرمجية تعتبر أكثر ملاءمة للطلاب. وهي متوفرة في نسختين: نسخة في الرياضيات المالية، MATHFIN.8XP أو نسخة في الرياضيات الأكتوارية، MATHACTU.8XP

(15.1) الماكرو الإضافي ACTUXL

(15.1.1) الوصف العام

يمكنكم تحميل التطبيق على عنوان الموقع التالي: www.digilex.ch. وهي مجانية مع استخدام جدول الوفيات السويسري 93-88 SM/SF بنسبة فائدة 3%.

وهذا التطبيق يمكن من حل عدد كبير من المسائل المدرجة في هذا الكتاب.

كذلك مرفق مع التطبيق ما يقارب الـ400 جدول للوفيات وملف مساعد لطريقة استخدام الجداول. وإذا أردتم استخدام هذه الجداول من خلال التطبيق

ACTUXL وجب عليكم دفع مبلغ مالي مقابل الحصول على رمز التفعيل، أما إذا لم تتمكنوا من ذلك فيمكنكم دائما استيراد الجداول إلى إكسل لعمل العمليات الحسابية التي ترغبون فيها.

ملاحظات:

- الجداول تظهر القيم في صورة نسب مئوية (%).
- آخر قيمة في الجدول تساوي 1000.
- إذا بدأ جدول المؤمن لهم برقم صفري فإن القيم تبقى صفرية إلى حين الوصول إلى أول عمر تقابله قيمة غير صفرية لـ .

عندما نفتح إكسل لأول مرة نلاحظ وجود شريط جديد يحتوي على أزرار:

X SM 88-93 Y SF 88-93 | 3% Code d'accès

وتظهر على هذا الشريط الأزرار التي تمكن من تحميل جدول جديد أو التي تسمح بتعيير نسبة الفائدة ولكن هذه الأزرار لا يمكن تشغيلها إلا بعد شراء البرنامج. ولكن ذلك لا يمنع من عمل الحسابات الضرورية باستخدام جدولين للوفاة داخل البرنامج هما جدولا الوفيات السويسرية SM/SF 88-93 بنسبة فائدة 3%.

للقيام بالعمليات يكفي أن نحرر الدالة التي نرغب في استخدامها مباشرة على ورقة الإكسل ومن ثم نحصل على النتيجة تلقائيا.

مثال رقم (1): احسب عدد الأحياء في سن 40 باستخدام جدول الوفيات السويسرية SF 88-93.

الحل

المطلوب هو حساب القيمة، يكفي أن نكتب داخل أي خلية:=LY (40).

مثال رقم(2): نرغب في عمل الحسابات التالية باستخدام جدول الوفيات السويسرية SM 88-93 بنسبة فائدة 3%.

الحل

نكتب داخل أي خلية ما يلي: =NX (65)/DX (30)

بعض الدوال تتطلب عددا من المعلمات لاستكمال العمليات الحسابية. في هذه الحالة يجب معرفة الصيغة التي تكتب على شكلها الدالة أو الاستعانة بالدعم المناسب لكل دالة.

إذا رغبتم مثلا حساب فارق عدد الأيام الذي يفصل بين تاريخين حسب الطريقة الألمانية، وبما أن هذه الدالة غير معروفة لدينا يمكننا استدعاء الدالة JOURS من قائمة إدراج دالة وعند تحديد الفئة اختر: ACTUXL:

وسيطات الدالة

JOURS

Date1 =

Date2 =

Base =

=

Calcul des jours entre deux dates selon la méthode européenne ([Base=0]), allemande (Base=1) ou .(exacte (Base=2

Date1

ناتج الصيغة =

تعليمات حول هذه الدالة موافق إلغاء الأمر

إذا كان وصف الدالة غير كاف وإذا أردت الحصول على دعم إضافي حول استخداماتها، اضغط فوق الزر تعليمات حول هذه الدالة لكي تحصل على معلومات أكثر دقة.

الأيام Jours

الوصف Description

لحساب عدد الأيام الفاصلة بين تاريخين

Calcule le nombre de jours séparant deux dates

الصيغة Syntaxe

([Jours (Date1, Date2 [, Base

ملاحظات Remarques

- Si **Base = 0** [ou omis] , le calcul se fait avec la méthode européenne 30/360 (voir livre section (1.1.2))

إذا قاعدة =0 (أو إهمال)، سوف يتم استخدام الطريقة الأوروبية 30/ 360 (راجع الفقرة (1.1.2) من الكتاب).

- Si **Base = 1** , le calcul se fait avec la méthode allemande 30/360 (voir livre section (1.1.1))

إذا قاعدة =1 (أو إهمال)، سوف يتم استخدام الطريقة الألمانية 30/ 360 (راجع الفقرة (1.1.1) من الكتاب).

- Si **Base = 2** , le calcul se fait avec la méthode exacte 365 (voir livre section (1.1.6))

إذا قاعدة =2 (أو إهمال)، سوف يتم استخدام الطريقة الصحيحة 365 (راجع الفقرة (1.1.6) من الكتاب).

Exemple
Calculer avec la méthode allemande, le nombre de jours séparant la date du 29 février 2004 au 28 février 2005

مثال:

احسب باستخدام الطريقة الألمانية عدد الأيام الفاصلة بين 29 فبراير 2004 و28 فبراير 2005.

الحل *Solution*

Fr= jours (B1, B2, 1)

(15.1.2) دليل استخدام الدوال

الدالة	وصف الدالة
الفصل الأول	
JOURS	*حساب عدد الأيام الفاصلة بين تاريخين باستخدام طرق حساب مختلفة*
CONVERT	*تحويل السنوات إلى سنوات أو أشهر أو أيام*
CONVERTAMJ	*تحويل رقم إلى سنوات/أشهر/أيام*
AGE	*حساب الأعمار باستخدام طرق مختلفة*

الدالة	وصف الدالة
الفصل الثاني	
SIMPLE_CN	*تحسب رأس المال النهائي لاستثمار بفائدة ثابتة*
SIMPLE_Co	*تحسب رأس المال الأصلي لاستثمار بفائدة ثابتة*
SIMPLE_N	*تحسب المدة لاستثمار بفائدة ثابتة*
SIMPLE_I	*تحسب الفائدة لاستثمار بفائدة ثابتة*
PROPORTIONNEL	*تحسب معدل الفائدة لاستثمار بفائدة ثابتة*
TAUXMOYEN_SIMPLE	*تحسب متوسط معدلات الفائدة لاستثمارات متعددة بفائدة ثابتة*
الفصل الثالث	
COMPOSE_CN	*تحسب رأس المال النهائي لاستثمار بفائدة مركبة*
COMPOSE_Co	*تحسب رأس المال الأصلي لاستثمار بفائدة مركبة*
COMPOSE_N	*تحسب المدة لاستثمار بفائدة مركبة*
COMPOSE_I	*تحسب الفائدة لاستثمار بفائدة مركبة*
EQUIVALENT	*تحسب معدل الفائدة المعادل لاستثمار بفوائد مركبة*
EFFECTIF	*تحسب معدل الفائدة الفعلي لاستثمار بفوائد مركبة*
الفصل الرابع	
POSTAN	*تحسب القيمة الحالية لدخلٍ ما بعد العد Postnumerando*
POSTSN	*تحسب القيمة النهائية لدخلٍ ما بعد العد Postnumerando*
PRAEAN	*تحسب القيمة الحالية لدخلٍ ما قبل العد Praenumerando*
PRAESN	*تحسب القيمة النهائية لدخلٍ ما قبل العد Praenumerando*
الفصل الخامس	
CK	*تحسب رأس المال المتبقي من قرض عند الفترة k*
RK	*تحسب استهلاك قرض عند الفترة k*
IK	*تحسب قيمة الفائدة لقرض عند الفترة k*
SK	*تحسب الاستهلاك التراكمي لقرض عند الفترة k*
AK	*تحسب قسط قرض عند الفترة k*

الدالة	وصف الدالة
الفصل السابع	
OMEGAX OMEGAY	ترجع آخر قيمة في جدول الوفيات X أو Y
ALPHAX ALPHAY	ترجع أول قيمة في جدول الوفيات X أو Y
QX QY	ترجع احتمال الوفاة حسب جدول الوفيات X أو Y
PX PY	ترجع احتمال الحياة حسب جدول الوفيات X أو Y
LX LY	ترجع عدد الأحياء حسب جدول الوفيات X أو Y
NPX NPY	ترجع احتمال مؤقت للحياة حسب جدول الوفيات X أو Y
NQX NQY	ترجع احتمال مؤقت للوفاة حسب جدول الوفيات X أو Y
EX EY	ترجع توقع الحياة حسب جدول الوفيات X أو Y
الفصل التاسع	
PRAEAX PRAEAY	ترجع القيمة الحالية لدخل عمري ما قبل العد حسب جدول الوفيات X أو Y
PRAEAXN PRAEAYN	ترجع القيمة الحالية لدخل مؤقت ما قبل العد حسب جدول الوفيات X أو Y
POSTAX POSTAY	ترجع القيمة الحالية لدخل عمري ما بعد العد حسب جدول الوفيات X أو Y
POSTAXN POSTAYN	ترجع القيمة الحالية لدخل مؤقت ما بعد العد حسب جدول الوفيات X أو Y
الفصل العاشر	
AX AY	ترجع القيمة الحالية لرأس مال حياة كاملة عند الوفاة حسب جدول الوفيات X أو Y
AXN AYN	ترجع القيمة الحالية لرأس مال مؤقت عند الوفاة حسب جدول الوفيات X أو Y
NEX NEY	ترجع القيمة الحالية لرأس مال عند البقاء على قيد الحياة حسب جدول الوفيات X أو Y
MIXTEX MIXTEY	ترجع القيمة الحالية لتأمين مختلط حسب جدول الوفيات X أو Y

الدالة	وصف الدالة
الفصل الحادي عشر	
DX DY	*ترجع عدد التبديلات أو في جدول الوفيات X أو Y*
NX NY	*ترجع عدد التبديلات أو في جدول الوفيات X أو Y*
SX SY	*ترجع عدد التبديلات أو في جدول الوفيات X أو Y*
CX CY	*ترجع عدد التبديلات أو في جدول الوفيات X أو Y*
MX MY	*ترجع عدد التبديلات أو في جدول الوفيات X أو Y*
RX RY	*ترجع عدد التبديلات أو في جدول الوفيات X أو Y*

(15.2) تطبيقات على الآلة الحاسبة TI-83 Plus

(15.2.1) الوصف العام

يمكنك البرنامج TI connect من ربط جهاز الحاسوب لديك مع الآلة الحاسبة TI-83 Plus وذلك عن طريق سلك الربط المتوفر مع الآلة. بعد تحميل البرنامج MATHFIN.8XP و/ أو MATHACTU.8XP تستطيع تركيب البرنامج في آلات أخرى باستخدام سلك الربط المتوفر مع الآلة.

يحتوي البرنامج MATHFIN.8XP على أهم الدوال المتعلقة بالرياضيات المالية التي تم تناولها في هذا الكتاب بينما تناول البرنامج MATHACTU.8XP الجزء المتعلق بالرياضيات الأكتوارية من هذا الكتاب.

بقدر الإمكان، كانت الدوال المستخدمة مشابهة لمثيلاتها الموصوفة في دليل الدوال بالفقرة (15.1.2).

(15.2.2) التسلسل الهرمي للبرنامج MATHFIN.8XP

يتمحور التسلسل الهرمي للبرنامج MATHFIN.8XP كما يلي:

MENU2: DATES ET DUREES	MENU GENERAL
1: RETOUR AU MENU	1:QUIT
2: JOURS	2:DATES ET DUREES
3: INTERET SIMPLE	3:CONVERTAMJ
4: INTERET COMPOSE	4 AGE
	5: RENTE CERTAINE
	6:EMPRUNTS

القائمة الرئيسية	القائمة رقم (2): التواريخ والأزمنة
1: (خروج)	1: (عودة للقائمة)
2 : (تواريخ وأوقات)	2: (الأيام)
3: (فائدة ثابتة)	3: (دالة تحويل السنوات)
4:(دالة تحويل السنوات)	4: (العمر)
5: (فائدة مركبة)	
6: (القروض)	

MENU4: INTERET COMPOSE	MENU 3: INTERET SIMPLE
1: RETOUR AU MENU	1:RETOUR AU MENU
2: SIMPLE_CN	2:COMPOSE_CN
3: SIMPLE_CO	3:COMPOSE_CO
4: SIMPLE_N	4 COMPOSE_N
5: SIMPLE_I	5: COMPOSE_I
6: PROPORTIONNEL	6:EQUIVALENT
7: EFFECTIF	

قائمة رقم (3): فائدة بسيطة	القائمة رقم (4): فائدة مركبة
1: عودة للقائمة	1: عودة للقائمة
2 : القيمة المستقبلية	2 : القيمة المستقبلية
3: القيمة الحالية	3: القيمة الحالية
4: عدد الفترات	4: عدد الفترات
5: نسبة الفائدة	5: نسبة الفائدة
6: النسبة المعادلة	6: المعدل النسبي
7: الحجم	

MENU 5: RENTE CERTAINE	MENU6: EMPRUNTS
1: RETOUR AU MENU	1: RETOUR AU MENU
2: POSTAN	2: R. ECHEANCE
3: POSTSN	3: AM.CONSTANT
4: PRAEAN	4: AN.CONSTANTE
	5: PRAESN

قائمة رقم (5): دخل مؤكد	القائمة رقم (6): القروض
1: عودة للقائمة	1: عودة للقائمة
2 : القسط الدوري في نهاية الفترة	2 : القسط الأخير
3: القسط المتراكم في نهاية الفترة	3: القسط الجزأ الثابت
4: القسط الدوري في بداية الفتة	4: القسط الدوري الثابت
5: القسط المتراكم في بداية الفترة	

(15.2.3) التسلسل الهرمي للبرنامج MATHACTU.8XP

بالنسبة لهذا البرنامج يجب إدخال نسبة الفائدة، وهو ما يمكن من إعادة حساب التبديلات تلقائيا. ولا يمكن في المقابل تغيير جدول الوفيات. الجدول الوحيد المتوفر في ذاكرة الآلة الحاسبة هو جدول الوفيات السويسرية93-88 SM .

يتمحور التسلسل الهرمي للبرنامج MATHFIN.8XP كما يلي:

MENU GENERAL	MENU2: FONCTIONS BIOS
1: QUIT (	1: RETOUR AU MENU ( )
2: FONCTIONS BIOS	2: QX
3: RENTES VIAG.	3: LX
4 COMMUTATIONS	4: NPX
5: ASS. CAPITAUX	5: NQX
	6: EX

القائمة الرئيسية	القائمة رقم (2): دوال البيوس
1: خروج	1: عودة للقائمة
2 : دوال بيوس	2 : احتمال الوفاة في العمر ×
3: دخل عمري	3: عدد الأحياء في العمر ×
4: تبديلات	4: احتمال البقاء على قيد الحياة بعد n سنة
5: رؤوس الأموال	5: احتمال الوفاة بعد n سنة
	6: توقع الحياة

MENU 3: RENTES VIAG	MENU4: COMMUTATIONS
1: RETOUR AU MENU	1: RETOUR AU MENU
2: PRAEAX	2: Dx, Nx, Cx,…
3: POSTAX	
4 PRAEAXN	
5: POSTAXN	

قائمة رقم (3): دخل عمري	القائمة رقم (4): تبديلات
1: عودة للقائمة	1: عودة للقائمة
2 : القسط في بداية الفترة	2: DX, Nx, Cx,…
3: القسط في نهاية الفترة	
4: القسط الأخير في بداية الفترة	
5: القسط الأخير في نهاية الفترة	

MENU 5: ASS. CAPITAUX
1: RETOUR AU MENU
2: AX
3: AXN
4: NEX
5: MIXTE

قائمة رقم (5): تأمين رؤوس الأموال
1: عودة للقائمة
2 : القسط
3: القسط الأخير
4: القسط التالي
5: القسط المشترك

الباب الرابع

مواضيع إضافية في الرياضيات

- **الفصل السادس عشر: المعادلات، الأسات، اللوغاريتمات، المتواليات**
- **الفصل السابع عشر: الجمع، الاستيفاء الداخلي، الاحتمالات، المصفوفات**

الفصل السادس عشر

المعادلات، الأسات، اللوغاريتمات، المتواليات

Equations, Puissances, Logarithmes, Progressions

(16.1) المعادلات

في الرياضيات المالية نتعامل مع المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد ومجهولين وكذلك المعادلات من الدرجة الثانية. بينما البحث عن معدلات الأداء يؤدي إلى المعادلات من درجات أعلى من 2. هذه المعادلات سيتم تناولها بأكثر تفصيل في الفصل القادم.

(16.1.1) المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

في المعادلات من الدرجة الأولى لمجهول واحد نسعى لعزل المجهول في طرف من المعادلة وترك العبارات الأخرى في الطرف الآخر من المعادلة. نفترض أن القارئ يمتلك القدرة على التعامل مع القواعد الأساسية لاستخدام الكسور والاختزالات... إلخ ولنتذكر القاعدتين التاليتين:

(أ) عندما نحول عبارة من طرف إلى طرف آخر لا بد من تغيير الإشارة.

مثال: $x - 2 = 7$ تعني أن $x = 9$ أو $x = 7 + 2$

(ب) إذا قسمنا أحد أطراف المعادلة برقم غير صفري يجب تقسيم الطرف الآخر بنفس الرقم. مثال: $3x = 12$ تعني أن $x = 4$ أو $x = \frac{12}{3}$

بعض الأمثلة المحلولة:

مثال رقم (1): أوجد حل المعادلة التالية:

$$3x - 10'000 = x + 20'000$$

الحل

$3x - 10'000 = x + 20'000$	المعادلة الأصلية
$2x - 10'000 = 20'000$	تحويل المجهول إلى الطرف الأيسر
$2x = 30'000$	تحويل 10000 إلى الطرف الأيمن
$\frac{2x}{2} = \frac{30'000}{2}$	تقسيم الطرفين على 2

وهو ما يعطينا في الأخير: $x = 15'000$

مثال رقم (2): أوجد حل المعادلة التالية:

$$P \cdot a_{\overline{n}|} = 30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|} + P$$

الحل

$P \cdot a_{\overline{n}|} = 30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|} + P$	المعادلة الأصلية
$P \cdot a_{\overline{n}|} - P = 30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|}$	تحويل إلى الطرف الأيسر
$P(a_{\overline{n}|} - 1) = 30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|}$	إظهار
$\frac{P(a_{\overline{n}|} - 1)}{a_{\overline{n}|} - 1} = \frac{30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|} - 1}$	قسمة الطرفين على $a_{\overline{n}|} - 1$

وهو ما يعطينا في الأخير: $P = \frac{30'000 \cdot A_{x:\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|} - 1}$

مثال رقم (3): أوجد حل المعادلة التالية:

$$P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

الحل

$$\begin{aligned}
P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \beta P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}} \\
P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \beta PC\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \\
P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta) &= A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \\
\frac{P\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta)} &= \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta)}
\end{aligned}$$

وهو ما يعطينا في الأخير: $P = \frac{A_{x:\overline{n}|}+\alpha+\gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}(1-\beta)}$

(16.1.2) المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

تسمى كذلك نظم المعادلات الخطية، توجد عدة طرق لحل هذه النظم، سوف نستخدم في هذه الفقرة طريقة التبديل التي يمكن تعميمها إلى نظم معادلات خطية لعدد من المعادلات والمجاهيل.

الطريقة تتمثل في عزل أحد المجاهيل في إحدى المعادلات والتعويض عنه في بقية المعادلات التي عددها $n-1$. في حالة نظم المعادلات المتكونة من معادلتين ومجهولين يكفي أن نعزل مجهولا واحدا في إحدى المعادلتين ونعوض عن قيمته في المعادلة الأخرى. وهذه بعض الحلول لنظم المعادلات الخطية.

مثال رقم (1): أوجد حل النظام التالي:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 3x - y = 25 \end{cases}$$

الحل

$y = 15 - x$	عزل في المعادلة الأولى
$3x - (15 - x) = 25$	تعويض في المعادلة الثانية
$3x - 15 + x = 25$	حذف الأقواس
$4x = 40$	تجميع
$x = 10$	اختزال

يكفي بعد ذلك أن نعوض عن x في المعادلة الأولى أو الثانية لكي نجد $y = 5$

مثال رقم (2): أوجد قيمتي استثمارين: الأول يوفر 4% والثاني 5% والاثنان معا يوفران عائدا يقدر بـ400 € سنويا. أما إذا عكسنا الاستثمارين ووضعنا الاستثمار الأول بدلا من الثاني والثاني بدلا من الأول فسنحصل على عائد يساوي 410 €. أوجد قيمة كل من الاستثمارين؟

الحل

لنرمز إلى مبلغ الاستثمار الأول الذي يوفر 4% (0.04) وقيمة الاستثمار الثاني الذي يوفر 5% (0.05). نستطيع كتابة نظام المعادلات الخطي لهذه المسألة كالآتي:

$$\begin{cases} 0,04x + 0,05y = 400 \\ 0,05x + 0,04y = 410 \end{cases}$$

$0,05y = 400 - 0,04x$	عزل $0,05y$ في المعادلة الأولى
$y = 8'000 - 0,8x$	تقسيم الطرفين على 0,05
$0,05x + 0,04(8'000 - 0,8x) = 410$	تعويض عن y في المعادلة الثانية
$0,05x + 320 - 0,032x = 410$	فك الأقواس
$0,018x = 90$	تجميع
$x = 5'000$	اختزال

وبما أن $y = 8'000 - 0,8x$ ينتج عنه $y = 8'000 - 0,8 \times 5'000$

فالمبلغان المستثمران هما: 5000 € و4000 €.

(16.1.3) المعادلة من الدرجة الثانية

تندرج المعادلات من الدرجة الثانية في الرياضيات المالية وأساسا في المسائل التي يطلب فيها البحث عن نسبة الفائدة أو معدل الإيرادات.

تأخذ المعادلة من الدرجة الثانية بشكل عام الصورة التالية:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (16.1)$$

يوجد جذران لهذه المعادلة في حالة وجود حل ($b^2 - 4ac \geq 0$):

$$x_1; x_2 = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (16.2)$$

مثال رقم (1): أوجد حل المعادلة التالية:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

الحل

بما أن فالمعادلة لها جذران هما:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{5+\sqrt{1}}{4} = \frac{6}{4} = 1,5$$

و

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{5-\sqrt{1}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

فالحل هو إذا: $x = 1$ و $x = 1,5$

مثال رقم (2): إذا علمت أن $r = i + 1$ احسب نسبة الفائدة i التي تحقق المعادلة التالية:

$$352 = 100r + 200r^2$$

الحل

نكتب أولا المعادلة في شكلها المعتاد: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

أي $200r^2 + 100r - 352 = 0$

بما أن $b^2 - 4ac = 100^2 - 4 \times 200 \times (-352) = 291'600 > 0$

فالمعادلة لها جذران هما:

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-100+\sqrt{291'600}}{400} = \frac{440}{400} = 1{,}1$$

و

$$r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-100-\sqrt{291'600}}{400} = \frac{-640}{400} = -1{,}6$$

وبما أن نسبة الفائدة يجب أن تكون موجبة فالنسبة التي نبحث عنها هي $i = r - 1$ ، أي $i = 0{,}1$` أو %10.

(16.2) الأسات والجذور

حساب الأسات يتواجد بقوة في الرياضيات المالية والأكتوارية وخاصة عند حساب معدلات الخصم وعمليات التحويل إلى رأس المال (الرسملة).

القواعد

إذا كانت $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ فإن: $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ مرة}}$

الجدول التالي يلخص أهم القوانين حول الأسات:

$a^0 = 1$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$
$a^p a^q = a^{p+q}$	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$(a^p)^q = a^{pq}$
$a^p b^p = (ab)^q$	$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$	$\sqrt[p]{a} = a^{1/p}$

ولدينا كذلك: $a^{1/2} = \sqrt{a}$

مثال رقم (1): أوجد ما يلي:

$$1{,}02^4 \times 1{,}02^7$$

الحل

$$1{,}02^4 \times 1{,}02^7 = 1{,}02^{(4+7)} = 1{,}02^{11} = 1{,}24$$

مثال رقم (2): احسب العبارة التالية:

$$\frac{(1+i)^5}{(1+i)^4}$$

الحل

$$\frac{(1+i)^5}{(1+i)^4} = (1+i)^{5-4} = (1+i)^1 = 1+i$$

مثال رقم (3): أوجد العبارة التالية:

$$\frac{v^{x+t-1}}{v^{x+1}}$$

الحل

$$\frac{v^{x+t-1}}{v^{x+1}} = v^{x+t-1-(x+1)} = v^{x+t-1-x-1} = v^{t-2}$$

مثال رقم (4): اكتب العبارة التالية من دون المقام:

$$NPV = \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n} + \frac{V_n}{(1+i)^n} - V_0$$

الحل

$$NPV = C_1\,(1+i)^{-1} + C_2(1+i)^{-2} + \cdots + C_n(1+i)^{-n} + V_n(1+i)^{-n} - V_0$$

(16.3) اللوغاريتم والأسس

يندرج استخدام اللوغاريتم والأسس عندما يكون المجهول موجودا في الأس مثال.

القواعد

الدالة $f(x) = ln(x)$ هي اللوغاريتم الطبيعي للمتغير x وهي معرفة عندما تكون $0 < x$.

الدالة $f(x) = log(x)$ هي اللوغاريتم العشري للمتغير x وهي كذلك معرفة عندما تكون $0 < x$.

الدالة $f(x) = e^x$ هي الأس الطبيعي للمتغير x وهي معرفة عند جميع القيم التي يأخذها المتغير x .

قيمة الرمز e هي : $2,718281 \dots$

دالة الأس الطبيعي هي الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم الطبيعي حيث إن: $e^{lnx} = x$ أو $\ln(e^x) = x$ عندما تكون $x > 0$.

الدالة $f(x) = 10^x$ هي الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم العشري في x، وهو ما يمكننا من كتابة العلاقات التالية:

$$y = \log(x) \Leftrightarrow 10^y = x \text{ و } y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x$$

خصائص

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$	$\ln(a^p) = p \ln a$
$e^a e^b = e^{a+b}$	$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	$(e^a)^p = e^{ap}$

مثال رقم (1): أوجد قيمة x في المعادلة التالية:

$$10 = 3^x$$

الحل

$10 = 3^x$ المعادلة الأصلية

$ln(10) = ln(3^x)$	تحويل الطرفين إلى اللوغاريتم
$ln(10) = xln(3)$	خصائص اللوغاريتم
$x = \frac{ln(10)}{ln(3)}$	التقسيم على

الحل هو إذا: $\frac{ln(10)}{ln(3)} = 2,0959$

مثال رقم (2): دالة رأس المال المحولة تربط بين القيمة المستقبلية (C_n) وكل من القيمة الحالية (C_0) وعدد الفترات (n) ومعامل رأس المال (r) وذلك من خلال العلاقة التالية:

$$C_n = C_0 r^n$$

استخرج قيمة n في كل من C_0 وC_n وr :

الحل

$C_n = C_0 r^n$	المعادلة الصلية
$\frac{C_n}{C_0} = r^n$	القسمة على C_0
$ln(\frac{C_n}{C_0}) = ln(r^n)$	التحويل إلى لوغاريتم
$ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right) = nln(r)$	خاصية اللوغاريتم
$\frac{ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{ln\,(r)} = n$	القسمة على $ln(r)$

الحل هو إذا: $\frac{ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)}{ln(r)}$

(16.4) المتواليات

تتواجد المتواليات خاصة في إعداد القواعد المالية للإيرادات (الدخل).

(16.4.1) المتواليات العددية

تمثل المتسلسلة:

10 8 6 4 2

متوالية عددية نعرف من خلالها:

- الحد الأول في المتوالية وهو: 2 $(a_1 = 2)$.
- الحد الخامس والأخير في المتوالية وهو: 10 $(a_5 = 10)$.
- أساس المتوالية هو:2 (R=2).

خواص المتوالية العددية (عدد حدودها يساوي n)

$a_n = a_1 + (n-1)R$	$a_n = a_{n-1} + R$
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	

مثال رقم (1): أوجد الحد العاشر والحد رقم nللمتوالية العددية التالية:

14 11 8 2

الحل

$Q_1 = 8$ الحد الأول

$R = 11 - 8 = 3$ أساس المتوالية= $a_2 - a_1$

$a_{10} = a_1 + (10-1)R = 8 + 9 \times 3 = 35$ الحد العاشر

أما الحد رقم n فهو يساوي:

$a_n = a_1 + (n-1)R$ استخراج الحد رقم n في الحد الأول

$a_n = 8 + (n-1)3$

$a_n = 8 + 3n - 3$ فك الأقواس

$a_n = 5 + 3n$ اختزال

مثال رقم (2): وزع مبلغ وقدره 15000 € على 5 موظفين وتم التوزيع بحيث يكون هناك بـ500 € بين كل موظف وموظف آخر.أوجد المبلغ الذي يحصل عليه الموظف الأول؟

الحل

$a_5 = a_1 + (5-1) \times 500$	استخراج الحد الخامس في الحد الأول
$a_5 = a_1 + 2'000$	فك الأقواس
$a_1 + a_2 + \cdots + a_5 = 15'000$	المبلغ الموزع
$\frac{5\,(a_1+a_5)}{2} = 15'000$	القاعدة في صورة أخرى
$\frac{5\,(a_1+(a_1+2'000))}{2} = 15'000$	التعويض عن قيمة a_5
$a_1 + (a_1 + 2'000) = 6'000$	الضرب بـ $^2/_5$
$a_1 = 2'000$	اختزال

الموظف الأول يحصل بذلك على 2000 €

(16.4.2) المتواليات الهندسية

المتسلسلة التالية:

2 4 8 16 32

تمثل متوالية هندسية نعرف من خلالها:

- الحد الأول في المتوالية وهو: 2 $(a_1 = 2)$.
- الحد الخامس والأخير في المتوالية وهو: 32 $(a_5 = 32)$.
- أساس المتوالية هو:2 (R=2).

خواص المتوالية الهندسية (عدد حدودها يساوي n)

$a_n = a_{n-1}R$	$a_n = a_1R^{n-1}$
$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1-R^n}{1-R}$ avec $R \neq 1$	
Si $\mid R \mid < 1$ alors $a_1 + a_2 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1}{1-R}$	

مثال رقم (1): أوجد مجموع الحدود للمتوالية الهندسية التالية:

$$\underbrace{1 + v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1}}_{n \text{عنصر}}$$

الحل

$$a_1 = 1 \quad R = v$$

مجموع الحدود لمتوالية هندسية يساوي:

$$a_1 \frac{1-R^n}{1-R} = \frac{1-v^n}{1-v}$$

بما أن:$d = v - 1$ فإن:

مجموع الحدود للمتوالية الهندسية = $\frac{1-v^n}{d}$

وهذه العبارة تمثل القيمة الحالية لدخل مؤكد ما قبل العد: $\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d}$

مثال رقم (2): أوجد القيمة الحالية لدخل عمري ما بعد العد:

$$a_{\overline{\infty}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots$$

الحل

$$a_1 = v \, R = v$$

مجموع الحدود (لعدد لانهائي) لمتوالية هندسية يساوي:

$$\frac{a_1}{1-R} = \frac{v}{1-v}$$

بما أن: $d = 1 - v$ فإن:

مجموع الحدود للمتوالية الهندسية = $\frac{}{d} = \frac{\frac{1}{1+i}}{\frac{i}{1+i}} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1+i}{i} = \frac{1}{i}$

وهذه العبارة ليست سوى القيمة الحالية لدخل عمري في نهاية الفترة:

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}$$

الفصل السابع عشر

الجمع، الاستيفاء الداخلي، الاحتمالات، المصفوفات

Sommes, Interpolation, Probabilitès, Matrices

(17.1) الجمع

تقوم رموز الجمع ($\sum$) بدور هام في اختصار قواعد الدخل (الريع) ، والقواعد المتعلقة بتحديد نوع الاستثمار، ونستخدمها كذلك عندما نريد برمجة هذه القواعد على الحاسب الآلي.

فالعبارات الطويلة مثل: $l_{20}+l_{21}+l_{22}+\cdots+l_{51}$ يمكن التعبير عنها بسهولة من خلال الصورة المبسطة: $\sum_{t=20}^{51} l_t$ وتقرأ هذه العبارة بأنها مجموع عناصر l_t من 20 إلى 51. الحرف t يسمى مؤشر الجمع. يمكن استخدام أي حرف آخر مكانه طالما لا يستخدم كرمز داخل القاعدة (فالحرف l مثلا لا يمكن استعماله لأنه يمثل في القاعدة ترتيب الأحياء).

(17.1.1) خصائص

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(kx_i)=k\sum_{i=1}^{n}x_i$$

حيث k عدد ثابت

$$\sum_{i=k}^{n} k = k\,\underbrace{(n-k+1)}_{\text{عدد العناصر}}$$

وفي حالة $k = 1$ فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} k = k(n-1+1) = kn$$

وهو ما يعطي عدد العناصر: $n - 1 + 1 = n$

مثال رقم (1): أوجد العبارة التالية:

$$\sum_{i=1}^{5} (4x_i)$$

الحل

$$\sum_{i=1}^{5} (4x_i) = 4\sum_{i=1}^{5} x_i$$ إظهار الرقم 4

$$4\sum_{i=1}^{5} x_i = 4\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$ تحليل العبارة

وهو ما يعطي في النهاية:

$$\sum_{i=1}^{5} (4x_i) = 4\,(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

مثال رقم **(2)**: حول العبارات التالية إلى رمز الجمع:

$v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5$

الحل

وبما أن $v = v^1$ $v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 = v^1 + v^2 + v^3 + v^4 + v^5$

$$v^1 + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 = \sum_{t=1}^{5} v^t$$ قاعدة الجمع

وبالتالي:

$$v + v^2 + v^3 + v^4 + v^5 = \sum_{t=1}^{5} v^t$$

مثال رقم (3): حول العبارات التالية إلى صورة جمع:

$$1 + v + v^2 + v^3 + \cdots$$

الحل

$1 + v + v^2 + v^3 + ::: = v^0 + v^1 + v^2 + v^3 + \ldots$ حيث $1 = v^0$

$$v^0 + v^1 + v^2 + v^3 + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} v^t$$

وفي النهاية نحصل على:

$$1 + v + v^2 + v^3 + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} v^t$$

مثال رقم (4): حول العبارات التالية إلى صورة الجمع ثم أوجد عدد العناصر:

$$v^{k+1}\frac{l_{x+k+1}}{l_x} + v^{k+2}\frac{l_{x+k+2}}{l_x} + \cdots + v^{w-x}\frac{l_w}{l_x}$$

الحل رقم (1)

الجمع يبدأ بالعنصر $k + 1$ وبالتالي فإن العبارتين التاليتين متساويتان:

$\sum_{t=k+1}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$ أو $\frac{1}{l_x}\sum_{t=k+1}^{w-x} v^t \; l_{x+t}$

عدد العناصر يساوي إذا: $w - x - (k+1) + 1 = w - x - k$

الحل رقم (2)

الجمع يبدأ بالعنصر 1. نتتبه إلى المؤشر في الأعلى الذي يجب تغييره بدوره. وبهذه الطريقة نحصل على آخر قيمة مساوية لـ:

$$v^{k+w-x-k}\ l_{x+k+w-x-k} = v^{w-x} l_w$$

عدد العناصر يساوي إذا: $w-x-k-1+1 = w-x-k$

$$\frac{1}{l_x}\sum_{t=k+1}^{w-x} v^t\ l_{x+t} \text{ أو } \sum_{t=k+1}^{w-x} v^t \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

(17.2) الاستيفاء الداخلي

يتمثل الاستيفاء الداخلي في رسم خط مستقيم على نقطتين نسميهما القطبين. إذا كنا نرغب في تقدير قيمة توجد داخل هاتين النقطتين نسمي تلك العملية استيفاءً داخلياً، أما إذا كنا نبحث عن تقدير قيمة خارج هاتين النقطتين فنسمي هذه العملية استيفاءً خارجياً.

يرتكز الاستيفاء الداخلي على المبرر الرياضي التالي:

الهدف هو حساب الإحداثية للنقطة C التي تقع على الخط المستقيم من إلى $\mathcal{A}\mathcal{D}$. من أجل ذلك نقوم برسم مثلث $\mathcal{ADE}$ يحتوي على مثلث آخر $\mathcal{ABC}$. بحسب قاعدة تالس Thales. المثلثان متوازيان وهو ما يمكن من كتابة العلاقة التالية:

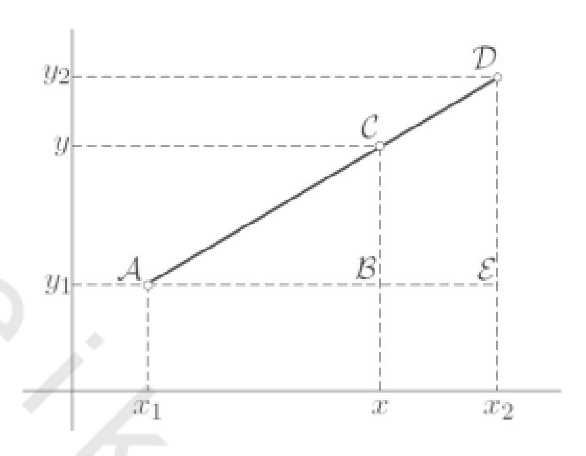
$$\frac{\mathcal{CB}}{\mathcal{AB}} = \frac{\mathcal{DE}}{\mathcal{AE}}$$

وبالتعويض عنها بقيم الإحداثيات نجد:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

بعد عزل y نجد:

$$y = \left(1-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right)y_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2$$



الطريقة العملية

الاستيفاء الداخلي يمكن القيام به بطريقة أسهل. يكفي أن تحسب العبارة:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

ثم نحسب المكمل لواحد لهذه العبارة:

$$1-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

وهذه بعض الأمثلة لطريقة الحساب المبينة أعلاه.

مثال رقم (1): أوجد القيمة المستفاة للقيمة 5 من الجدول الآتي:

3	$\longmapsto$	20
5	$\longmapsto$	?
8	$\longmapsto$	22

الحل

بين الرقمين 3 و5 الفارق هو 2.

بين الرقمين 5 و8 الفارق هو 3.

بين الرقمين 3 و8 الفارق هو 5.

وهذا يمكن من عمل كسرين: $2/5$ و $3/5$ وهذان الرقمان نضربهما على التوالي في 20 و22 وهو ما يمكننا من الحصول على القيمة المستفاة للرقم 5 وهي:

$$؟ = 20 \times 3/5 + 22 \times 2/5 = 20{,}8$$

مثال رقم (2): إذا علمنا أن عدد المؤمن لهم في سنتي 2003 و2006 كان كما يلي:

2003	$\longmapsto$	18'000
2004	$\longmapsto$	?
2006	$\longmapsto$	24'000

قدر عدد المؤمن لهم في سنة 2004.

الحل

بين سنتي 2003 و2004 هناك فارق بسنة 1.

بين سنتي 2004 و2006 هناك فارق بسنتين 2.

بين سنتي 2003 و2006 هناك فارق بثلاث سنوات 3.

وهو ما يمكن من عمل كسرين هما: $1/3$ و $2/3$ وهذان الرقمان نضربهما على التوالي في 2003 و2006 وهو ما يمكننا من الحصول على القيمة المستفاة للرقم 2004 وهي:

$$؟ = 18'000 \times 2/3 + 24'000 \times 1/3 = 20'000$$

نسنطيع بذلك أن نقدر عدد المؤمن لهم في سنة 2004 بـ20000

مثال رقم (3): تعطي جداول الوفاة عدد الأحياء l_x لأعمار مكتملة. يتطلب حساب الدخل المجزأ توفر عدد الأحياء لأعمار غير مكتملة. احسب عدد الأحياء في العمر $x + \theta$ حيث $0 \leq \theta \leq 1$.

الحل

تطبيقا للجداول السابقة نستطيع إدراج الجدول التالي:

x	$\longmapsto$	l_x
$x+\theta$	$\longmapsto$	$?$
$x+1$	$\longmapsto$	l_{x+1}

بين الرقمين x و$x+\theta$ الفارق هو θ.

بين الرقمين $x+\theta$ و$x+1$ الفارق هو $1-\theta$.

بين الرقمين x و $x+1$ الفارق هو 1.

وهذا يمكن من عمل كسرين: $\frac{\theta}{1}$ و $\frac{1-\theta}{1}$ وهذان الرقمان نضربهما على التوالي في l_x وl_{x+1} وهو ما يمكننا من الحصول على القيمة المستفاة للرقم $l_{x+\theta}$ وهي:

$$l_{x+\theta} = (1-\theta) \times l_x + \theta \times l_{x+1} \quad (17.1)$$

تعتبر عملية التقدير المبينة أعلاه من أكثر عمليات التقدير المستخدمة في الرياضيات الأكتوارية لتقدير احتمالات الوفاة لسنوات مجزأة.

(17.3) نظرية الاحتمالات

تجمع الرياضيات الأكتوارية بين الرياضيات المالية وحساب الاحتمالات، حيث إن رأس المال في الرياضيات الأكتوارية لم يعد صرفه مؤكدا كما هو الحال في الرياضيات المالية بل مرتبط ببقاء الشخص على قيد الحياة.

هذه الفقرة تهتم بأساسيات نظرية الاحتمالات المستخدمة في الرياضيات الأكتوارية.

(17.3.1) الرموز

- $A \cup B$: تعني حدوث الحدث A أو الحدث B أو الاثنين معا.

- AwB: تعني حدوث الحدثA أو الحدثB دون إمكانية حدوث الحدثين معا.
- $A \cap B$: تعني حدوث الحدثين A و B.
- $\overline{}$: تعني عدم حدوث الحدث A.
- Ω: المجموعة الكلية (حدوثها مؤكد).
- $\emptyset$: الحدث المستحيل.
- $P(A)$: احتمال حدوث الحدث A.

(17.3.2) خصائص

1) تعريف الاحتمال

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

مثال رقم (1): ما هو احتمال سحب رقم زوجي من بين الأرقام التالية:

0 ,1، 2،...،36، أي ما يساوي إجمالا 37 رقما؟

الحل

يوجد من بين هذه الأرقام والتي عددها 37 (عدد الحالات الممكنة) 18 رقما زوجيا (عدد الحالات الملائمة). الحل هو إذا:

احتمال سحب رقم زوجي $= 0{,}4864 = \frac{18}{37}$

مثال رقم (2): أوجد احتمال بقاء رجل عمره 30 سنة على قيد الحياة، علما بأن عدد الأحياء في سن 30 سنة هو 96000 وفي سن 31 سنة لم يتبق منهم سوى 95000؟

الحل

عـدد الحـالات الملائمـة يمثلـه هنـا عـدد الأحيـاء في سـن 31 سـنة أي $_{31} = 95'000$ ، بينما عدد الحالات الممكنة هـو ممثـل بعـدد الأحيـاء في سـن 30 سنة. الحل هو إذا:

الاحتمال السنوي للحياة = $0,9895833 = \frac{95,000}{96,000} = \frac{l_{31}}{l_{30}}$

2) الحدث المستحيل

$$P(\emptyset) = 0$$

مثال: ما هو احتمال البقاء على قيد الحياة إلى سن 1000 سنة؟

الحل

حاليا هذا الحدث يعتبر مستحيل التحقق. الحل هو إذا:

احتمال العيش إلى سن 1000 سنة = 0

3) الحادث المكمل

$$P(\overline{A})1 - P(A)$$

مثال: الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لرجل عمره 30 سنة هو: $p_{30} =$ 0,9896، ما هو الاحتمال السنوي لوفاة هذا الرجل (q_{30})؟

الحل

الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة هو مكمل للاحتمال السنوي للوفاة، الحل هو إذاً:

الاحتمال السنوي للوفاة = $q_{30} = 1 - p_{30} = 1 - 0,9896 = 0,0104$

4) تقاطع حادثين مستقلين

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال: الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لرجل عمره 30 سنة يساوي: $p_{30} = 0,9896$ والاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لامرأة عمرها 50 سنة يساوي: $p_{50} = 0,9976$. ما هو احتمال بقاء الزوجين على قيد الحياة.

الحل

احتمال بقاء الزوجين على قيد الحياة يساوي: $P_{30} \times P_{50} = 0,9896 \times 0,9976 = 0.9872$

5) جمع حادثين مستقلين

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P\,(A \cap B)$$

$$P(A\omega B) = P(A) + P(B) - 2P\,(A \cap B)$$

مثال رقم (1): الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لرجل في سن الثلاثين هو: $P_{30}=0.9896$ والاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لامرأة في سن الخمسين هو: $P_{50}=0.9976$. احسب الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة للرجل أو للمرأة أو الاثنين (أو تعني الاحتواء).

الحل

الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياء لأحد الزوجين هو:

$$P_{30} + P_{50} - P_{30} \times P_{50} = 0.9896 + 0.9976 - 0.9896 \times 0.9976 = 0.9999$$

مثال رقم (2): الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لرجل عمره 30 سنة هو: $p_{30}=0.9896$ والاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة لامرأة في سن الخمسين هو: $p_{50}=0.9976$

احسب الاحتمال السنوي البقاء على قيد الحياة لأحد الزوجين فقط (الرجل أو المرأة وأوْ هنا تعني الإقصاء).

الحل

الاحتمال السنوي للبقاء على قيد الحياة للرجل فقط أو للمرأة فقط هو:

$$P_{30} + P_{50} - 2P_{30} \times P_{50} = 0.9896 + 0.9976 - 2 \times 0.9896 \times 0.9976 = 0.0128$$

(17.3.3) المتغير العشوائي:

يعرف المتغير العشوائي بأنه المتغير الذي تقترن قيمه بنتائج تجربة عشوائية.
نرمز بـ (X) لهذا المتغير العشوائي والدالة الاحتمالية له، أي القيم الاحتمالية P (x_i) المقترنة بمختلف القيم x_i التي يأخذها المتغير.
نعرف التوقع الرياضي E (X) لمتغير عشوائي ما بالعبارة التالية:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i)$$

مثال رقم (1): يرمي اللاعب حجر النرد. ويربح نصف الرقم الذي يظهر. بين هذه الحالة في صورة متغير عشوائي واحسب التوقع الرياضي لهذه اللعبة.

الحل

نرمز بـ (xi) للقيم المختلفة التي يأخذها المتغير X و بـ(x_i) P الاحتمالات المقترنة بالقيم التي يأخذها المتغير X. يمكننا إذا أن نحصل على الجدول الآتي:

x_i	**0.5**	1	.51	2	.52	3
P (x_i)	**6/1**	/61	/61	/61	/61	/61

التوقع الرياضي (لكي تكون المباراة عادلة) يحسب بالطريقة التالية:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 0.5 * \frac{1}{6} + 1 * \frac{1}{6} + \cdots + 3 * \frac{1}{6} = 1.75$$

مثال رقم (2): احسب التوقع الرياضي للدالة الاحتمالية الآتية:

x_i	v^1	v^2	…	v^{w-x+1}
P (x_i)	$\frac{d_{x+1}}{l_x}$	$\frac{d_{x+2}}{l_x}$	…	$\frac{d_w}{l_x}$

الحل

التوقع الرياضي يأخذ الشكل التالي:

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = v^1 \frac{d_{x+1}}{l_x} + v^2 \frac{d_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^{w-x+1} \frac{d_w}{l_x}$$

ملاحظة: في الرياضيات الأكتوارية، نرمز لهذا التوقع الرياضي بـ A_x. وهي تمثل العلاوة الوحيدة (UP) التي تدفع لتأمين حياة شاملة ($UP = E(x) = A_x$)

(17.4) المعادلات الضمنية

بعض المعادلات في الرياضيات المالية والأكتوارية لا تحل بطريقة تقليدية، لأنه من المستحيل فصل المجهول.مثال: $x = \ln(x)$ لأجل ذلك نستخدم الطرق التقريبية مثل طريقة التصنيف أو طريقة النقطة الثابتة.

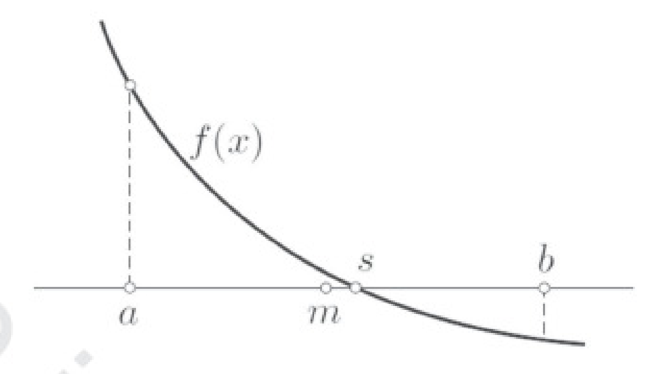
(17.4.1) طريقة التصنيف

لتكن لدينا دالة $f(x)$ متصلة في المجال $[a;b]$ وتقطع المحور x، أي أنها تحقق ما يلي:$f(a)f(b) < 0$.الطريقة التالية تمكن من إيجاد جذر للمعادلة $f(x) = x$ في المجال $[a;]$:

1- $m := \frac{a+b}{2}$.

2- إذا كانت: $f(m)f(b) < 0$ فإن $b := m$ أو $a := m$.

3- نكرر العملية في النقطة 1. إلى أن تقترب m من الحل s.



مثال: احسب القيمة i بمعرفة $a_{\overline{10|}} = 8,5302$

الحل

$$a_{\overline{10|}} = \frac{1 - v^{10}}{i} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)}{i} = 8,5302$$

المعادلة التي وجب حلها تكتب على النحو التالي:

$$f(i) = \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{i} - 8,5302 = 0$$

ثم نبدأ بتحديد قيم أولية لـ a و b، مثلا: $a = 0,01, b = 0,1$ وهكذا

فإن: $f(a)f(b) < 0$ الجدول يعطي الحل:

a	b	m	$f(m)f(b)$
0,01	0,1	0,055	>0
0,01	0,055	0,0325	>0
0,01	0,0325	0,02125	<0
0,02125	0,0325	0,026875	<0
0,026875	0,0325	0,029688	<0
0,029688	0,0325	0,03109	>0
0,029688	0,03109	0,030389	>0
0,029688	0,030389	**0,030039**	>0

الحل هو إذا: $i = 0,03$

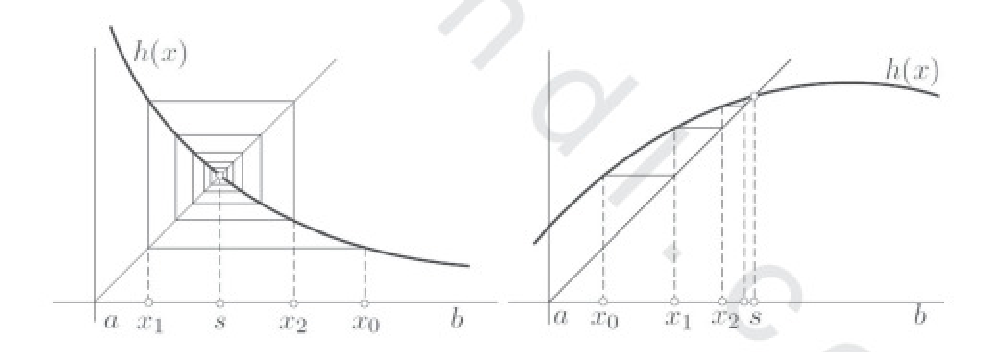
(17.4.2) طريقة النقطة الثابتة

تتمثل هذه الطريقة في إدراج قيمة داخل عبارة رياضية، فنحصل على ناتج نقوم بإدراجه بدوره داخل العبارة. ثم نكرر هذه العملية إلى حين الوصول إلى قيمة مدخلة تساوي القيمة المخرجة.

هذه الطريقة تتطلب تحويل المعادلة من الصورة: $f(x) = 0$ إلى الصورة: $h(x) = x$.وفي المقابل إذا كانت: $|h'(x)| < 1$ داخل المجال $x \in [a;b]$، نستطيع إيجاد سلسلة تقاربية تبدأ من النقطة $x_0 \in [a;b]$:

$$x_{n+1} = h(x_n)$$

يحدث التقارب من خلال إحدى الرسمتين التاليتين:



مثال: احسب القيمة i بمعرفة $a_{\overline{10|}} = 8,5302$.

الحل

$$a_{\overline{10|}} = \frac{1 - v^{10}}{i} = \frac{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{i} = 8,5302$$

المعادلة المطلوب حلها تكتب على النحو التالي:

$$f(i) = \frac{1-v^{10}}{i} = 8,5302$$

$$f(i) = 1 - v^{10} = 8,5302i$$

$$f(i) = \frac{1-v^{10}}{8,5302} = i$$

نعرف الدالة $h(i)$ على النحو التالي:

$$h(i) = \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{8,5302}$$

حساب تفاضل الدالة يعطينا:

$$h'(i) = \frac{10}{8\,(1+i)^{11}}$$

باختيارنا للمجال:$[a; b] = [0,1; 0,5]$ نحصل على:

$h(a) = h(0,1) = 0,43 < 1$ و$h(b) = h(0,5) = 0,014 < 1$نقوم بتحديد قيمة عشوائية داخل هذا المجال.$x_0 = 0,2$ مثلا. ثم نضع الجدول التالي:

n	x_n	$h\,(x_n)$
0	0.2	0.098297
1	0.098297	0.071327
2	0.071327	0.058371
3	0.058371	0.050755
4	0.050755	0.045777
...	...	...
33	0.030097	0.030082
34	**0.030082**	**0.030070**

الحل هو إذاً: $i = 0,03$

(17.4.3) استخدام المعالج

إكسل

نستطيع استخدام المعالج solver داخل إكسل وهو مدرج ضمن خاصية استهداف goal Seek الموجودة في القائمة الفرعية تحليل ماذا لو؟what if analysis والموجودة بدورها في القائمة الرئيسية بيانات Data وذلك لإيجاد الحلول للمعادلات بمجهول واحد من الدرجة n.

مثال: أوجد قيمة المجهول i الذي يحقق المعادلة: $a_{\overline{10|}} = 8,5302$ (مثال الصفحة السابقة).

الحل

يجب إدخال القاعدة التالية داخل إحدى خلايا إكسل:

1	1	a10
2	0.03	=(1-(1/(1+A2)^10/A2))

ثم استدعاء خاصية استهداف (بيانات/ تحليل ماذا لو؟/ استهداف) ثم نضع القيم التالية:

Goal Seek	
Set cell:	$8$2
To value:	8.5302
By changing cell:	A2
OK	Cancel

وهو ما يعطينا الحل التالي:$i = 0,03$

❖ **تي آي-83 (TI-83)**

يكفي أن يتم تطبيق المعالج : MATH/SOLVER داخل الآلة الحاسبة تي-آي 83 ومن ثم إدخال القاعدة التالية:

```
EQUATION SOLVER
Eqn:0=(1-(1/(1+X
))^10)/X-8.5302
```

ثم نستدعي المعالج بالنقر ▼باستخدام السهم =X نضع بعد ذلك المؤشر على القيمة فوق الأزرار SOLVE ALPHA وهو ما يعطينا الحل التالي:

$i = 0{,}03$

(17.5) حساب المصفوفات

في الرياضيات الأكتوارية يتطلب تعديل جداول الوفاة معرفة مسبقة بحساب المصفوفات وهو ما نذكر به في الفقرات الآتية:

المصفوفة هي مجموعة من الأرقام وضعت داخل جدول، كل رقم يتم تحديده من خلال الصف الذي ينتمي إليه والعمود الموجود بداخله، وهذا ما نجده كذلك داخل برنامج إكسل حيث الخلايا مرتبة في شكل مصفوفة، أو في لعبة الكلمات المتقاطعة.

نرمز إلى $A_{n,p}$ بالمصفوفة التي تحتوي على عدد n من الصفوف و عدد p من الأعمدة، نرمز إلى a_{ij} بعنصر المصفوفة الذي يوجد في الصف رقم i والعمود رقم j .

مثال: المصفوفة التالية:

$$A_{2,3} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة (2 في 3) فهي تحتوي على صفين و3 أعمدة.

(17.5.1) خصائص المصفوفات

1- جمع المصفوفات

إذا كانت A وB مصفوفتين من نفس الدرجة فإن C=A+B حيث $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

مثال: أوجد حاصل جمع المصفوفتين:

$$A_{1,2} = (1 \quad -5) \ B_{1,2} = (6 \quad 3)$$

الحل

بما أن المصفوفتان لهما نفس الدرجة فإن عملية الجمع ممكنة وهي كالآتي:

$$A + b = (1 + 6 \quad -5 + 3) = (7 \quad -2)$$

2- ضرب المصفوفات

عملية ضرب المصفوفات ليست دائما ممكنة. نضرب المصفوفة A بالمصفوفة B إذا كانت المصفوفة A من الدرجة $(n \times m)$ و المصفوفة B من الدرجة $(m \times p)$.

النتيجة تكون بذلك مصفوفة C=AxB من الدرجة $(n \times p)$ وهي تساوي:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \cdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ik} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

كل عنصر من المصفوفة C يساوي مجموع حاصل ضرب عناصر الصف i في المصفوفة A بعناصر العمود k في المصفوفة B.

مثال: أوجد حاصل ضرب المصفوفتين $A_{2,2}$ و $B_{2,1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

الحل

عملية ضرب المصفوفتين ممكنة حيث $_{2,2}B_{2,1} = C_{2,1}$. حاصل عملية الضرب هو:

$$C_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: الترتيب مهم جدا في عملية ضرب المصفوفات حيث إن: $B_{m,p}A_{n,m}$ ليست ممكنة.

3– ضرب مصفوفة بعدد حقيقي k

كل عنصر في المصفوفة يضرب بالعدد k

$$kA = ka_{ij}$$

مثال: إذا كانت المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ ، أوجد $(-6) \times A$

الحل

$$(-6) \times A = (-6) \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \propto 3 & -6 \times 1 \\ -6 \times 2 & -6 \times 5 \\ -6 \times 8 & -6 \times -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -18 & -6 \\ -12 & -30 \\ -48 & 6 \end{pmatrix}$$

4– المصفوفة المبدلة

نرمز لـA^{T} بالمصفوفة المبدلة للمصفوفة A. وهي ناتجة من تحويل صفوف المصفوفة A إلى أعمدة المصفوفة ـA^{T}. إذا كانت A مصفوفة من الدرجة $(m \times n)$ فإن المصفوفة ^{T} هي مصفوفة من الدرجة $(n \times m)$

مثال: أوجد المصفوفة المبدلة للمصفوفة A :

$$A_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

الحل

بتحويل الصفوف إلى أعمدة تتحول المصفوفة $A_{3,2}$ إلى المصفوفة المبدلة $A^{T}{}_{2,3}$.

$$A^{T} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

5– مقلوب المصفوفة

للبحث عن مقلوب المصفوفة نحتاج إلى عدة مراحل لا نقدمها في هذه الفقرة، نشير فقط إلى أن مقلوب المصفوفة لا يمكن البحث إلا للمصفوفات المربعة $(n \times n)$.A^{-1} هو مقلوب المصفوفة A وهي مصفوفة من نفس درجة المصفوفة A.


إكسل

استخدام برنامج إكسل يسهل كثيرا العمليات الحسابية على المصفوفات، حيث نجد الدوال التالية التي تساعد في حل العديد من المسائل:

الجمع والطرح	+ و–
الضرب	MMULT ()
المبدلة	TRQNSPOSE ()
المقلوبة	MINVERSE ()

لتسهيل العمليات في إكسل نقوم بوضع أسماء على مجموعة الخلايا التي تحتوي على المصفوفات المستخدمة. بعد ذلك نقوم بالعمليات الحسابية على هذه المصفوفات باستخدام المسميات المذكورة.

مثال: إذا كانت $A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة التالية: $(A^{T}A)^{-1}$

الحل

حاصل ضرب المصفوفتين هو مصفوفة من الدرجة (2×2) وكذلك مقلوبها. نسمي A مجموعة الخلايا التي تحوي المصفوفة A.

نحدد بعد ذلك مجموعة الخلايا من حجم (2×2) ونكتب داخلها القاعدة التالية:

MINVERSE (MMULT (TRANSPOSE (A) ;A) ثم نضغط في آن واحد على الأزرار الثلاثة: Ctrl+Schift+Enter وهو ما يعطينا المصفوفة التالية:

$$(A^{\mathrm{T}}A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}077 & -0{,}051 \\ -0{,}051 & 0{,}145 \end{pmatrix}$$

A1		
	A	B
1	1	2
2	4	1
3	0	-2

5	0.07692	-0.05128
6	-0.05128	0.14530

تي–آي 83 (TI-83)

توجد في الآلة الحاسبة تي–آي 83 خاصية العمليات الحسابية على المصفوفات. لإيجاد المصفوفة المبدلة للمصفوفة A نتبع الخطوات التالية:

(أ) نعرف أولا درجة المصفوفة A من خلال الأزرار التالية: 2nd MATRX EDIT.

(ب) نضغط من جديد فوق الأزرار نفسها لإظهار المصفوفة 2nd MATRX ENTER.

(جـ) بعد ذلك نضغط على الأزرار 2nd MATRX MATH T2: لكي نحصل على المصفوفة المبدلة للمصفوفة A.

لحساب مقلوب المصفوفة نستخدم الزر x^{-1}.

باستخدام زر واحد نستطيع الحصول على ناتج العملية $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$ كما حصلنا عليه من خلال برنامج إكسل.

الباب الخامس

ملحقات

- الملحق (أ) حل التمارين
- الملحق (ب) جداول الوفاة

الملحق (أ)

حل التمارين

حلول تمارين الفصل الأول

تمرين (1): (أ) 50 (ب) 180 (جـ) 106 (د) 15 (هـ) 10

تمرين (2): (أ) 60 (ب) 191 (جـ) 58 (د) 109 (هـ) 28

تمرين (3): (أ) 45 (ب) 29 (جـ) 106 (د) 1596

تمرين (4): (أ) 45 (ب) 29 (جـ) 106 (د) 1596

تمرين (5): (أ) 45 (ب) 29 (جـ) 106 (د) 1596

تمرين (6): 78,2 سنة

تمرين (7): 2346 يوما

تمرين (8): 3375 سنة

تمرين (9): 276 شهرا

تمرين (10): 11,5 سنة

تمرين (11): (أ) 3 سنوات وشهر و20 يوما (ب) 12 سنة وشهران و3 أيام (ج) 17 سنة وشهران و19 يوما

تمرين (12): (أ) 42,1611 (ب) 42,0833 (ج) 42 (د) 42

تمرين (13): $B_{62,65} = \sum_{u=62}^{64} b_u + b_{65\frac{3}{12}} = 0{,}585$

حلول تمارين الفصل الثاني

تمرين (1): (أساس 30/ 360) 39,67 € (أساس صحيح/ 365) 39,62 €

تمرين (2): (أساس 30/ 360) 5087,22 € (أساس صحيح/ 365) 5087,67 €

تمرين (3): شهران و10 أيام

تمرين (4): 4%

تمرين (5): 14 أغسطس

تمرين (6): 3%

تمرين (7): 0,75% شهريا

تمرين (8): 15%

تمرين (9): 1200000 €

تمرين (10): 120 يوما

تمرين (11): 3,44%

تمرين (12): $\frac{3i}{2}$

تمرين (13): 306,13 €

تمرين (14): 3000 frs

تمرين (15): 6000 € بنسبة 4% و4000 € بنسبة 5%

تمرين (16): (أ) 1613,33 (ب) $400n + 400\frac{0,04}{12}\frac{n\,(n+1)}{2}$

تمرين (17): 14,69%

حلول تمارين الفصل الثالث

تمرين (1): frs 18575 , 73

تمرين (2): (أ) 75 , 79962 € (ب) 13 , 79809 € (جـ) 75 , 79962 €

تمرين (3): 28 , 17 سنة

تمرين (4): 2%

تمرين (5): 02 , 2251 €

تمرين (6): $n=$ 352 سنة و3 أشهر و0 يوم إذا هو الفيلسوف رونيه ديسكارت

تمرين (7): $C_n = C_0\,(1{,}01)^6$

تمرين (8): 4%

تمرين (9): 48 , 2563 € بنسبة 10% و52 , 2436 € بنسبة 8%

تمرين (10): 03 , 3%

تمرين (11): 72 , 0%

تمرين (12): 253 €

تمرين (13): (أ) 08 , 30961 € (ب) 80 , 48030 € ثم 08 , 30961 €

تمرين (14): 92 , 4%

تمرين (15): 33 , 4%

تمرين (16): 33 , 4%

تمرين (17): البنك يستخدم نسبة فائدة بسيطة

تمرين (18): 42 , 3%

تمرين (19): 38 , 10%

تمرين (20): 63 , 12011 €

تمرين (21): (أ) 292820 *frs* (ب) 354312,20 *frs* (جـ) 295401,33 *frs*

تمرين (22): (أ) 10498 سنة (ب) 6,93 سنة

تمرين (23): 1633,233983 مليون

حلول تمارين الفصل الرابع

تمرين (1):

(أ) 5407,22 (ب) 2453,83 (جـ) 331

(د) 1820,50 (هـ) 5137,08 (و) 3797,70

(ز) 500 (ح) 295,53 (ط) 280,76

تمرين (2): $\frac{1}{i}\left(\frac{s_{\overline{100|}}}{a_{\overline{2|}}} - 50\right)$

تمرين (3): 1

تمرين (4): 32798,46 €

تمرين (5): 8137,27 frs

تمرين (6): 59891,10

تمرين (7): (أ) 24465,70 frs (ب) 24028,31 frs

تمرين (8): 6492,93 €

تمرين (9): 225488,67 frs

تمرين (10): 1235,30 €

تمرين (11): 5%

تمرين (12): 10 أقساط بـ12500 frs وقسط أخير بـ12761,19 frs

تمرين (13): 159240,71 €

تمرين (14): 1408 frs

تمرين (15): 4497,46 €

تمرين (16): مثال: $\overline{2|}$ $PV = 10v + 20va_{\overline{3|}} + 50v^5$

تمرين (17): (أ) 6000 € (ب) 5075,69 €

تمرين (18): 631,83 €

تمرين (19): 6893,41 €

تمرين (20): (أ) 40054,57 frs (ب) 25792,25 frs (جـ) 43134,40 frs

حلول تمارين الفصل الخامس

تمرين (1): 2,41%

تمرين (2):

A_k	I_k	S_k	R_k	C_k	K
3000	623,46	2376,54	2376.54	6000	1
4000	376,51	6000	3623,46	3623,46	2

تمرين (3):

A_k	I_k	S_k	R_k	C_k	K
820,30	220,30	3000	600	9600	5

تمرين (4): $n = 10\ C = 1500$ €

تمرين (5): نثبت أن: $r = \frac{v^{n-k}}{v^{n-k+1}} = \frac{1-ia_{\overline{n-k|}}}{1-ia_{\overline{n-k+1|}}} = \frac{R_{k+1}}{R_k}$

تمرين (6): (أ) $40000 = xv^{10}\ddot{a}_{\overline{10|}}$ (ب)10470,21 €

تمرين (7):

A_k	I_k	S_k	R_k	C_k	k
4649,72	1719,60	7595,93	2930,11	10334,18	3

تمرين (8): (أ) 9% (ب) 10000 € (جـ) 5048,13 €

(د)

A_k	I_k	S_k	R_k	C_k	K
1558,20	246,69	8570,5	1311,50	2741	9
1558,20	128,60	10000	1429,50	1429,50	10

تمرين (9):

A_k	I_k	S_k	R_k	C_k	K
728,41	225,56	5790,28	502,85	29712,58	12

تمرين (10): (أ) 11906,15 (ب) 7 أقساط بـ 12405,89 € زايد قسط بـ18114,52 €

تمرين (11): 309,80 €

تمرين (12): 89 قسط بـ374,61 € وقسط بـ346,28 €

تمرين (13): 23 شهرا

تمرين (14): 2520 €

تمرين (15): 1803,31 €

تمرين (16): 5,738%

تمرين (17): 4,78%

تمرين (18): 4637,50 *frs*

تمرين (19): (أ) 91,34% (ب) 92,63% (جـ) 94,12%

تمرين (20): صاحب حق الانتفاع: 231315,60 € وصاحب الملكية: 268684,40 €

حلول تمارين الفصل السادس

تمرين (1):

الفترة	الاستهلاك	القيمة
0		1500
1	250	1250
2	250	1000
3	250	750
4	250	500

تمرين (2): 200 frs

تمرين (3): $n = 5$ أو $n = 4$

تمرين (4):

الفترة	الاستهلاك	القيمة
0		5000
1	2189,29	2811,70
2	1230,57	1581,13
3	692,00	889,13
4	389,13	500

تمرين (5): (أ) 3200 frs (ب) 3490,91 (جـ) 3123,68

تمرين (6): (أ) 2500 € (ب) 2222,22 € (جـ) مستحيل

تمرين (7): (أ) 29140365, € (ب) 5321,16 €

تمرين (8): (أ) $A_1 = \frac{2}{5}\ A_2 = \frac{6}{25}, A_3 = \frac{18}{125}, A_4 = \frac{54}{625}, A_5 = \frac{162}{3125}$

(ب) أساس المتوالية: $\frac{3}{5}$ و $\sum A_k = \frac{2882}{3125}$ (جـ) 16000 frs

تمرين (9): 10%

تمرين (10): NPV=13400,25 وبالتالي نقبل المشروع

IRR=13,169%>10% وبالتالي نقبل المشروع

تمرين (11): %1,685

تمرين (12): (أ) $NPV_A = 21,98$ (بالآلاف) و$NPV_B = 25,49$ (بالآلاف)

المشروع B هو الأفضل

$IRR_A = 10,704\%$و $IR_B = 9,833\%$ المشروع A هو الأفضل.

(ب) $_A = 1,055$ و $\pi_B = 1,063$ المشروع B هو الأفضل

تمرين (13): NPV=22124,42 استثمار مناسب

تمرين (14): قبول العرض بـ105000 € سنويا لمدة 10 سنوات

تمرين (15): يجب أن يدوم النظام لمدة 8 سنوات

تمرين (16): إذا كانت تكلفة القرض أكبر من 5,77% فمن الأفضل استئجار الآلة.

حلول تمارين الفصل السابع

تمرين (1): احتمال أن يبقى شخص عمره 42 سنة على قيد الحياة طيلة الثماني سنوات القادمة.

تمرين (2): ${}_{10}q_{65}$

تمرين (3): (أ) $d_{x+t} = 1$ (ب) $e_x = \frac{w-x}{2}$

تمرين (4): 339214,5 €

تمرين (5): $e_x = \frac{52}{21}$ و $\ddot{e}_x = \frac{125}{42}$

تمرين (6): (أ) 9984360, (ب) 9333540, (جـ) 0666460, (د) 0,956727

(هـ) 0,043273

تمرين (7): 501 قسط

تمرين (8): 0,099963

تمرين (9): $\frac{d_{70}+d_{80}}{l_{20}}$

تمرين (10): (أ) 0,9984296 (ب) 89 سنة

تمرين (11): (أ) 0,0107572 (ب) 90 سنة

تمرين (12): (أ) $\frac{8}{9}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (جـ) $\frac{1}{8}$ (د) 42,14

تمرين (13): (أ) 1000 (ب) 0 (جـ) $\frac{1000}{120}$ (د) $\frac{3}{10}$

تمرين (14): (أ) 0,95 (ب) 0,0975

تمرين (15):

العمر x	l_x	d_x
0	200000	770
1	199230	910
2	198320	1050
3	197270	

تمرين (16):

العمر x	q_x	l_x	d_x
90	/31	3000	1000
91	/52	2000	800
92	/21	1200	600
93	/32	600	400
94	/54	200	160
95	1	40	40

تمرين (17):

العمر x	l_x	d_x	p_x	q_x
0	1000	100	0,9	0,1
1	900	150	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	750	150	0,8	0,2
3	600	300	0,5	0,5
4	300	180	0,4	0,6
5	120	120	0	1

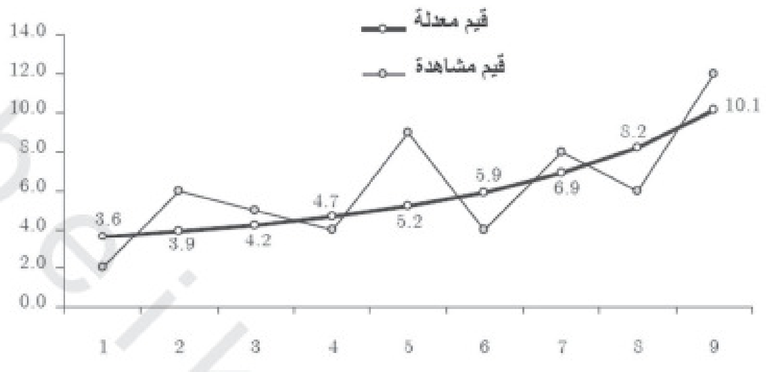
تمرين (18): $\frac{9}{10}$

حلول تمارين الفصل الثامن

تمرين (1):

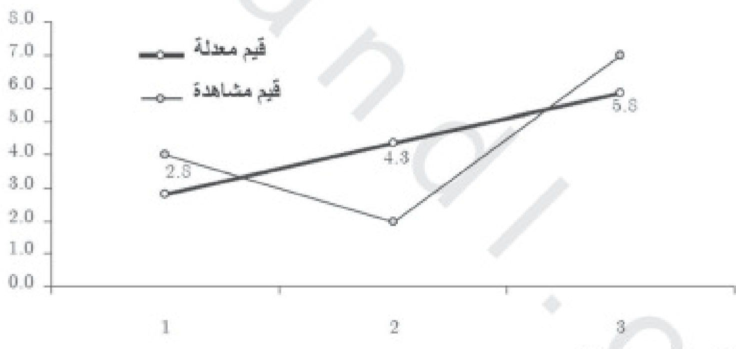


تمرين (2):



تمرين (3): $c = 1,1020470$ $g = 0,9993529$ و $s = 0,999217$

تمرين (4):



تمرين (5): (أ) و (ب)



(أ) 15,92 مليون يورو

تمرين (6): (أ)



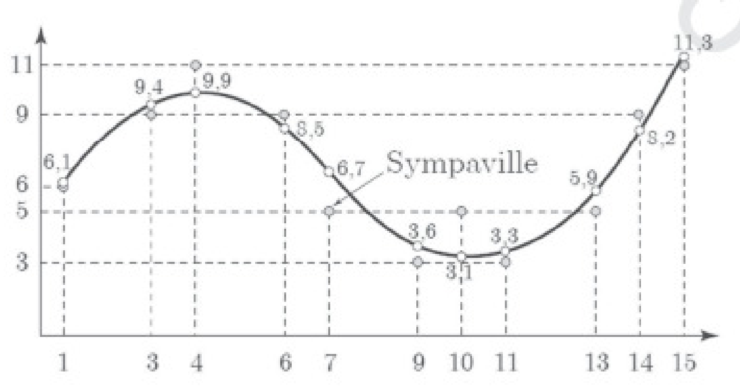
(ب) 19,55 مليون يورو

تمرين (7): (أ)



(ب) 20,98 مليون يورو

تمرين (8):



حلول تمارين الفصل التاسع

تمرين (1): القيمة المحسوبة يدويا: 1,6428 القيمة الدقيقة: 1,660575

تمرين (2): القيمة المحسوبة يدويا: 0,6428 القيمة الدقيقة: 0,660575

تمرين (3): لدينا فوريا: 0,6605751=1-660575,

تمرين (4): 3,69811

تمرين (5): $250\ddot{a}_{18:\overline{25|}}$

تمرين (6): € 46066,62

تمرين (7): $5000_{\overline{47|}}a_{18}$

تمرين (8): (أ) 8000 € (ب) 7883,50 € (جـ) 7877,24 €

تمرين (9): $100a_{40:\overline{24|}} + 500_{25|}\ddot{a}_{40}$

تمرين (10): 0,9561387

تمرين (11): القيمة الحالية لدخل سنوي يقدر بـ12000 يصرف مسبقا لمؤمن له ابتداءً من عمر 60 سنة وطيلة 5 سنوات. المؤمن له يبلغ من العمر اليوم 25 سنة.

تمرين (12): القيمة الحالية لدخل شهري يقدر بـ1000 يصرف في بداية الشهر طيلة 5 سنوات لزوجين عمرهما على التوالي 25 و30 سنة. الدخل سيتم صرفه لمدة 10 سنوات ويتوقف عند وفاة أحد الزوجين.

تمرين (13): $NPV = 8'000a_x + 15'000a_y - 3'000a_{xy}$

حلول تمارين الفصل العاشر

تمرين (1): العلاوة الوحيدة: $15000\ A_x$

تمرين (2): العلاوة الوحيدة: $15000\ {}_{|37}A_{28}$

تمرين (3): العلاوة الوحيدة: $15000\ {}_{|37}A_{28}$

تمرين (4): العلاوة الوحيدة: $10'000\ {}_{|10}A_{30} + 20'000_{10|10}A_{30} + 15'000_{20}E_{30}$

تمرين (5): 0,5%

تمرين (6): 0,467159

تمرين (8): (أ) $_{n}E_x = 0{,}5$ (ب) $_{|n}A_x = 0{,}05$

تمرين (9): بالحساب اليدوي: 0,969754 وبالحساب دون اختزال العلامات العشرية: 0,969050

تمرين (10): (أ) $\ddot{a}_4 = 1{,}73$ (ب) $A_4 = 0{,}842725$ (جـ) 0,828324

(د) 0,82254 (هـ) 0,206612 (ز) € 2,81

(ز) € 26,30 (ح) € 83,94 (ط) € 61,29

تمرين (11): $500'000 a_{\overline{3|}} A_{x:\overline{10|}}$

حلول تمارين الفصل الحادي عشر

تمرين (1): € 121,53

تمرين (2): € 3205,28

تمرين (3): frs 1085633,45

تمرين (4): frs 1063633,45

تمرين (5): € 5632,10

تمرين (6): € 14792,47

تمرين (7): € 8419,87

تمرين (8):

(أ) مبلغ قدره 1000 € في حالة الوفاة خلال السنة لرجل عمره 43 سنة

(ب) مبلغ قدره 1000 € في حالة الوفاة خلال الأربعة سنوات القادمة لرجل عمره 43 سنة

(جـ) دخل عمري مؤجل بـ45 سنة ويصرف طيلة 10 سنوات لمؤمن له عمره اليوم 20 سنة. الدخل السنوي: 2000€

(د) دخل عمري مؤجل بـ45 سنة ويصرف طيلة 20 سنوات لمؤمن له عمره اليوم 20 سنة. الدخل السنوي: 2000€

(هـ) مبلغ يصرف في حالة الوفاة إذا حدثت بعد سن 65. المؤمن له عمره 20 سنة والمبلغ المؤمن هو: 5000 €

(و) تأمين مختلط يقدر بـ15000 € لمؤمن يبلغ من العمر 25 سنة ولمدة 25 سنة

(ز) مبلغ يقدر بـ1500 € في حالة البقاء على قيد الحياة إلى عمر 65 سنة لمؤمن له عمره اليوم 20 سنة

تمرين (9)

(أ) 16,60676 (ب) 10,93637 (جـ) 7,82720

(د) 7,41973 (هـ) 0,33172 (و) 0,97087

تمرين (10): 0,0028375

تمرين (11): 45000 *frs*

تمرين (12): 33586,76 €

حلول تمارين الفصل الثاني عشر

تمرين (1): 36,33 €

تمرين (2): 3,07 €

تمرين (3): frs 2794,51

تمرين (4): frs 3833,13

تمرين (5): € 333,24

تمرين (6): € 2581,59

تمرين (7): € 4656,47

تمرين (8): € 132647,35

تمرين (9): % 4,623393

تمرين (10): frs 4264,81

تمرين (11): € 2899,68

تمرين (12): *frs* 82853,30

تمرين (13):

العلاوة السنوية العادية=23967,15 € العلاوة السنوية المعاد حسابها في سن 50=209,31 € والعلاوة السنوية المعاد حسابها في سن 51=48543,69 €

تمرين (14):

(أ) الموظفون: 92,18 frs في الشهر والمتدربون: 9,20 frs في الشهر.

(ب) الموظفون: 96,44 frs في الشهر والمتدربون: 9,64 frs في الشهر.

(جـ) الموظفون: 92,67 frs في الشهر والمتدربون: 9,67 frs في الشهر.

تمرين (15): 7,02% من الراتب. تمويل الدخول: 191901 €

حلول تمارين الفصل الثالث عشر

تمرين (1): العلاوة السنوية: 36,35 €. احتياط: 398,81 €

تمرين (2): العلاوة الشهرية: 16,45 €. احتياط: 2139,05 €

تمرين (3): العلاوة السنوية 51 ,2794 frs. احتياط: 18 ,45749 frs

تمرين (4): العلاوة السنوية 13 ,3833 €. احتياط 61 ,43303 €

تمرين (5): العلاوة الشهرية: 24 ,333 €. احتياط: 61 ,47008 €

تمرين (6): العلاوة السنوية: 59 ,2581 frs. احتياط 58 ,50168 frs

تمرين (7): العلاوة السنوية: 47 ,4656 €. احتياط: 04 ,32258 €

تمرين (8): (أ) 81 ,4264 frs (ب) 32 ,19349 frs (جـ) frs18273

تمرين (9): (أ) 02 ,6972 frs (ب) 46 ,36682 frs (جـ) frs 110895

تمرين (10):

(أ) 2933,45 € (ب) $_{10}V_{30}^{\text{PC}} = 21'085{,}71$ € و $_{10}V_{30}^{\text{Zillmer}} = 20'614{,}58$ €

(جـ) 08 ,23696 € (د) 05 ,1165 €

ملحق (ب)

جداول الوفاة

جداول الوفاة السويسرية SM/SF 88-93

سيدات				رجال			
e°y	ly	1000qy	y	e°x	lx	1000qx	x
81.05	100000	5.851	0	74.19	100000	7.542	0
80.53	99415	0.609	1	73.75	99246	0.637	1
79.57	99354	0.265	2	72.8	99183	0.353	2
78.6	99328	0.221	3	71.82	99148	0.306	3
77.61	99306	0.189	4	70.84	99117	0.271	4
76.63	99287	0.165	5	69.86	99090	0.245	5
75.64	99271	0.148	6	68.88	99066	0.228	6
74.65	99256	0.137	7	67.89	99044	0.216	7
73.66	99243	0.13	8	66.91	99022	0.21	8
72.67	99230	0.128	9	65.92	99001	0.209	9
71.68	99217	0.129	10	64.94	98981	0.212	10
70.69	99204	0.136	11	63.95	98960	0.22	11
69.7	99191	0.147	12	62.96	98938	0.234	12
68.71	99176	0.166	13	61.98	98915	0.256	13
67.72	99160	0.193	14	60.99	98889	0.297	14
66.73	99140	0.229	15	60.01	98860	0.377	15
65.75	99118	0.276	16	59.03	98823	0.532	16
64.77	99090	0.33	17	58.07	98770	0.789	17
63.79	99058	0.389	18	57.11	98692	1.129	18
62.81	99019	0.442	19	56.18	98581	1.442	19
61.84	98975	0.479	20	55.26	98439	1.565	20

سيدات				رجال			
60.87	98928	0.499	21	54.34	98285	1.567	21
59.9	98879	0.508	22	53.43	98131	1.588	22
58.93	98828	0.512	23	52.51	97975	1.628	23
57.96	98778	0.516	24	51.59	97815	1.656	24
56.99	98727	0.521	25	50.68	97653	1.669	25
56.02	98675	0.528	26	49.76	97490	1.668	26
55.05	98623	0.537	27	48.85	97328	1.658	27
54.08	98570	0.548	28	47.93	97166	1.642	28
53.11	98516	0.562	29	47	97007	1.622	29
52.14	98461	0.578	30	46.08	96850	1.604	30
51.17	98404	0.598	31	45.15	96694	1.588	31
50.2	98345	0.621	32	44.22	96541	1.58	32
49.23	98284	0.648	33	43.29	96388	1.581	33
48.26	98221	0.68	34	42.36	96236	1.594	34
47.29	98154	0.717	35	41.43	96082	1.62	35
46.32	98084	0.759	36	40.49	95927	1.659	36
45.36	98009	0.808	37	39.56	95768	1.711	37
44.4	97930	0.863	38	38.63	95604	1.777	38
43.43	97845	0.926	39	37.7	95434	1.857	39
42.47	97755	0.996	40	36.76	95257	1.955	40
41.52	97657	1.076	41	35.84	95071	2.069	41
40.56	97552	1.166	42	34.91	94874	2.204	42
39.61	97439	1.267	43	33.98	94665	2.36	43
38.66	97315	1.38	44	33.06	94441	2.541	44
37.71	97181	1.506	45	32.15	94201	2.749	45
36.76	97035	1.646	46	31.23	93942	2.988	46
35.82	96875	1.801	47	30.33	93662	3.259	47
34.89	96700	1.972	48	29.42	93356	3.568	48
33.96	96510	2.159	49	28.53	93023	3.917	49
33.03	96301	2.362	50	27.64	92659	4.312	50
32.11	96074	2.581	51	26.76	92259	4.756	51
31.19	95826	2.817	52	25.88	91821	5.254	52
30.27	95556	3.068	53	25.01	91338	5.81	53
29.37	95263	3.333	54	24.16	90808	6.43	54
28.46	94945	3.614	55	23.31	90224	7.119	55
27.56	94602	3.914	56	22.47	89581	7.884	56
26.67	94232	4.235	57	21.65	88875	8.733	57
25.78	93833	4.583	58	20.84	88099	9.673	58

سيدات				رجال			
24.9	93403	4.963	59	20.03	87247	10.713	59
24.02	92939	5.382	60	19.25	86312	11.86	60
23.15	92439	5.847	61	18.47	85288	13.123	61
22.28	91899	6.368	62	17.71	84169	14.511	62
21.42	91313	6.958	63	16.96	82948	16.033	63
20.57	90678	7.631	64	16.23	81618	17.697	64
19.72	89986	8.4	65	15.51	80174	19.517	65
18.88	89230	9.28	66	14.81	78609	21.508	66
18.06	88402	10.286	67	14.13	76918	23.687	67
17.24	87493	11.436	68	13.46	75096	26.074	68
16.43	86492	12.754	69	12.81	73138	28.691	69
15.64	85389	14.265	70	12.17	71040	31.562	70
14.86	84171	15.996	71	11.55	68798	34.717	71
14.09	82825	17.982	72	10.95	66409	38.186	72
13.34	81335	20.262	73	10.36	63873	42.007	73
12.6	79687	22.879	74	9.79	61190	46.222	74
11.89	77864	25.881	75	9.24	58362	50.872	75
11.19	75849	29.321	76	8.71	55393	56.005	76
10.51	73625	33.258	77	8.2	52291	61.672	77
9.86	71176	37.756	78	7.71	49066	67.933	78
9.22	68489	42.886	79	7.23	45733	74.852	79
8.62	65552	48.724	80	6.78	42309	82.501	80
8.03	62358	55.352	81	6.34	38819	90.96	81
7.47	58906	62.855	82	5.93	35288	100.321	82
6.94	55204	71.324	83	5.53	31748	110.682	83
6.43	51266	80.849	84	5.16	28234	122.14	84
5.96	47122	91.517	85	4.8	24785	134.729	85
5.51	42809	103.412	86	4.47	21446	148.442	86
5.08	38382	116.607	87	4.17	18263	163.237	87
4.69	33906	131.162	88	3.88	15281	179.023	88
4.32	29459	147.121	89	3.62	12546	195.661	89
3.98	25125	164.5	90	3.38	10091	212.948	90
3.66	20992	183.286	91	3.16	7942	230.613	91
3.37	17145	203.429	92	2.96	6111	248.318	92
3.11	13657	224.835	93	2.77	4593	265.653	93
2.87	10586	247.383	94	2.59	3373	284.199	94

رجال				سيدات			
95	304.039	2414	2.42	95	271.005	7967	2.64
96	325.264	1680	2.25	96	295.647	5808	2.44
97	347.971	1134	2.1	97	321.253	4091	2.25
98	372.263	739	1.95	98	347.767	2777	2.08
99	398.251	464	1.81	99	375.13	1811	1.93
100	426.054	279	1.68	100	403.29	1132	1.79
101	455.797	160	1.55	101	432.197	675	1.65
102	487.617	87	1.43	102	461.811	383	1.53
103	521.658	45	1.32	103	492.099	206	1.42
104	558.075	21	1.2	104	523.039	105	1.31
105	597.035	9	1.09	105	554.621	50	1.2
106	638.715	4	0.98	106	586.852	22	1.07
107	683.304	1	0.82	107	619.753	9	0.88
108	1000	0	0.5	108	1000	3	0.5

تبديلات رجال-3%

1000Ax	aax	Mx	Cx	Nx	Dx	x
129.32	29.89327	12932.23	732.23	2989326.9	100000	0
126.61	29.98622	12199.99	59.6	2889326.9	96355.15	1
129.86	29.87484	12140.39	32.06	2792971.8	93489.09	2
133.45	29.7516	12108.33	26.92	2699482.7	90734.04	3
137.19	29.6232	12081.41	23.13	2608748.6	88064.38	4
141.07	29.48987	12058.28	20.35	2520684.3	85476.27	5
145.09	29.35177	12037.93	18.33	2435208	82966.32	6
149.25	29.20897	12019.6	16.89	2352241.7	80531.49	7
153.55	29.06151	12002.71	15.93	2271710.2	78169.02	8
157.98	28.90943	11986.78	15.37	2193541.2	75876.33	9
162.54	28.75271	11971.41	15.16	2117664.8	73650.97	10
167.24	28.59135	11956.25	15.3	2044013.9	71490.64	11
172.08	28.42536	11940.95	15.79	1972523.2	69393.08	12
177.05	28.25474	11925.16	16.76	1903130.1	67356.14	13
182.15	28.07958	11908.4	18.83	1835774	65377.55	14
187.37	27.90024	11889.57	23.2	1770396.4	63454.52	15
192.69	27.71769	11866.38	31.84	1706941.9	61583.13	16
198.04	27.53388	11834.54	45.76	1645358.8	59757.61	17
203.36	27.35147	11788.78	63.56	1585601.2	57971.34	18
208.56	27.1727	11725.22	78.7	1527629.8	56219.29	19
213.69	26.99681	11646.52	82.8	1471410.6	54503.14	20
218.87	26.81867	11563.72	80.38	1416907.4	52832.87	21
224.22	26.63497	11483.34	78.96	1364074.6	51213.67	22
229.73	26.44602	11404.38	78.46	1312860.9	49643.04	23
235.37	26.25213	11325.92	77.37	1263217.8	48118.67	24
241.18	26.05285	11248.54	75.56	1215099.2	46639.78	25
247.16	25.84756	11172.99	73.21	1168459.4	45205.78	26
253.33	25.63575	11099.77	70.53	1123253.6	43815.9	27
259.7	25.41697	11029.25	67.68	1079437.7	42469.18	28
266.29	25.19083	10961.56	64.84	1036968.5	41164.53	29
273.1	24.95704	10896.72	62.12	995804	39900.72	30
280.13	24.71538	10834.61	59.64	955903.27	38676.45	31
287.41	24.4657	10774.96	57.5	917226.82	37490.31	32
294.92	24.20792	10717.47	55.77	879736.51	36340.86	33
302.66	23.942	10661.69	54.51	843395.65	35226.62	34
310.64	23.66799	10607.18	53.7	808169.04	34146.09	35
318.86	23.38591	10553.48	53.3	774022.95	33097.84	36
327.31	23.09579	10500.18	53.28	740925.11	32080.53	37
335.99	22.79766	10446.91	53.63	708844.59	31092.87	38
344.91	22.49155	10393.28	54.34	677751.72	30133.62	39

1000Ax	aax	Mx	Cx	Nx	Dx	x
354.05	22.17749	10338.94	55.41	647618.1	29201.6	40
363.43	21.85553	10283.52	56.85	618416.5	28295.65	41
373.04	21.52574	10226.67	58.66	590120.85	27414.66	42
382.87	21.18821	10168.02	60.86	562706.19	26557.52	43
392.92	20.84305	10107.16	63.46	536148.67	25723.14	44
403.19	20.49041	10043.69	66.49	510425.53	24910.46	45
413.68	20.13047	9977.2	69.96	485515.07	24118.42	46
424.37	19.76343	9907.25	73.87	461396.66	23345.98	47
435.26	19.38952	9833.37	78.26	438050.67	22592.13	48
446.34	19.00903	9755.12	83.12	415458.54	21855.85	49
457.6	18.62225	9672	88.48	393602.69	21136.15	50
469.04	18.22952	9583.52	94.34	372466.54	20432.06	51
480.64	17.8312	9489.18	100.7	352034.48	19742.61	52
492.4	17.42769	9388.48	107.55	332291.87	19066.89	53
504.29	17.01941	9280.93	114.88	313224.98	18403.99	54
516.31	16.60676	9166.05	122.7	294820.99	17753.07	55
528.44	16.19022	9043.35	130.99	277067.92	17113.29	56
540.67	15.77026	8912.36	139.76	259954.63	16483.85	57
552.99	15.3474	8772.59	148.99	243470.78	15863.98	58
565.37	14.92217	8623.61	158.64	227606.81	15252.93	59
577.81	14.49512	8464.96	168.69	212353.88	14650.03	60
590.29	14.0668	8296.28	179.07	197703.85	14054.64	61
602.78	13.63778	8117.21	189.72	183649.21	13466.21	62
615.28	13.20858	7927.49	200.55	170183	12884.28	63
627.77	12.77973	7726.94	211.48	157298.72	12308.45	64
640.24	12.35171	7515.46	222.42	144990.27	11738.48	65
652.67	11.925	7293.04	233.33	133251.79	11174.16	66
665.05	11.50009	7059.71	244.12	122077.63	10615.37	67
677.35	11.07748	6815.59	254.72	111462.26	10062.06	68
689.58	10.65769	6560.87	265.02	101400.2	9514.28	69
701.71	10.24125	6295.85	274.93	91885.93	8972.14	70
713.73	9.8287	6020.92	284.33	82913.79	8435.88	71
725.61	9.42061	5736.59	293.1	74477.9	7905.84	72
737.35	9.01758	5443.48	301.09	66572.06	7382.48	73
748.93	8.62022	5142.4	308.13	59189.58	6866.37	74
760.31	8.22919	4834.27	314.03	52323.22	6358.24	75
771.5	7.84517	4520.23	318.57	45964.97	5859.02	76
782.46	7.46881	4201.66	321.52	40105.95	5369.79	77
793.18	7.1008	3880.14	322.64	34736.16	4891.87	78
803.64	6.74181	3557.5	321.7	29844.29	4426.75	79
813.81	6.39256	3235.8	318.48	25417.54	3976.11	80
823.68	6.05378	2917.32	312.78	21441.43	3541.82	81
833.22	5.72626	2604.53	304.46	17899.61	3125.88	82
842.4	5.41087	2300.08	293.4	14773.73	2730.38	83

1000Ax	aax	Mx	Cx	Nx	Dx	x
851.21	5.10862	2006.68	279.55	12043.35	2357.45	84
859.59	4.82068	1727.12	262.82	9685.89	2009.24	85
867.53	4.54805	1464.31	243.26	7676.65	1687.9	86
875	4.29154	1221.05	221.16	5988.75	1395.48	87
881.99	4.05167	999.89	197.04	4593.28	1133.68	88
888.49	3.82863	802.85	171.65	3459.6	903.61	89
894.5	3.62222	631.19	145.89	2555.99	705.64	90
900.05	3.43165	485.31	120.72	1850.35	539.2	91
905.18	3.25532	364.58	97.1	1311.15	402.77	92
909.99	3.09037	267.48	75.81	908.38	293.94	93
914.6	2.93197	191.67	57.82	614.44	209.57	94
919.03	2.78	133.85	42.99	404.87	145.64	95
923.27	2.63435	90.86	31.08	259.24	98.41	96
927.33	2.49487	59.78	21.78	160.83	64.46	97
931.22	2.36143	38	14.75	96.37	40.81	98
934.94	2.23385	23.25	9.62	55.56	24.87	99
938.49	2.11195	13.64	6.01	30.69	14.53	100
941.88	1.99551	7.63	3.58	16.16	8.1	101
945.12	1.88417	4.04	2.03	8.06	4.28	102
948.23	1.77737	2.02	1.08	3.78	2.13	103
951.25	1.67389	0.94	0.54	1.65	0.99	104
954.25	1.57065	0.4	0.25	0.67	0.42	105
957.52	1.45861	0.16	0.1	0.24	0.17	106
961.92	1.30747	0.06	0.04	0.08	0.06	107
970.87	1	0.02	0.02	0.02	0.02	108

تبدیلات سیدات-3%

1000Ay	aay	My	Cy	Ny	Dy	y
103.06	30.7951	10305.54	568.1	3079509.9	100000	0
100.89	30.86958	9737.44	57.08	2979509.9	96519.28	1
103.37	30.78442	9680.35	24.08	2882990.7	93650.96	2
106.23	30.68608	9656.28	19.51	2789339.7	90899.18	3
109.22	30.58343	9636.76	16.18	2698440.5	88232.12	4
112.33	30.47669	9620.59	13.74	2610208.4	85646.07	5
115.55	30.366	9606.85	11.98	2524562.3	83137.79	6
118.89	30.25147	9594.87	10.73	2441424.5	80704.32	7
122.34	30.13314	9584.14	9.9	2360720.2	78342.98	8
125.89	30.01105	9574.23	9.43	2282377.2	76051.24	9
129.56	29.88519	9564.81	9.27	2206326	73826.73	10
133.33	29.7556	9555.53	9.44	2132499.3	71667.16	11
137.22	29.62228	9546.1	9.96	2060832.1	69570.33	12
141.2	29.4853	9536.14	10.9	1991261.8	67534.05	13
145.3	29.34474	9525.24	12.29	1923727.7	65556.14	14
149.49	29.20072	9512.95	14.16	1858171.6	63634.45	15
153.78	29.0534	9498.79	16.52	1794537.1	61766.86	16
158.17	28.90296	9482.26	19.23	1732770.3	59951.3	17
162.63	28.74955	9463.03	21.96	1672819	58185.92	18
167.19	28.59315	9441.07	24.21	1614633.1	56469.22	19
171.84	28.4335	9416.87	25.46	1558163.8	54800.28	20
176.6	28.27003	9391.41	25.78	1503363.6	53178.7	21
181.49	28.10217	9365.63	25.46	1450184.9	51604.02	22
186.52	27.92943	9340.16	24.88	1398580.8	50075.53	23
191.7	27.75151	9315.28	24.32	1348505.3	48592.14	24
197.04	27.56827	9290.96	23.85	1299913.2	47152.51	25
202.54	27.37958	9267.11	23.45	1252760.7	45755.29	26
208.19	27.18532	9243.66	23.14	1207005.4	44399.16	27
214.02	26.98537	9220.52	22.93	1162606.2	43082.83	28
220.01	26.77961	9197.59	22.8	1119523.4	41805.07	29
226.18	26.56792	9174.79	22.76	1077718.3	40564.65	30
232.52	26.35019	9152.03	22.83	1037153.7	39360.39	31
239.04	26.12631	9129.19	23.01	997793.28	38191.14	32
245.74	25.89617	9106.18	23.3	959602.14	37055.76	33
252.63	25.65967	9082.88	23.72	922546.38	35953.16	34
259.71	25.41674	9059.16	24.27	886593.22	34882.26	35
266.97	25.16727	9034.89	24.94	851710.96	33842.01	36
274.43	24.9112	9009.95	25.74	817868.95	32831.38	37
282.08	24.64844	8984.21	26.68	785037.57	31849.38	38
289.93	24.37893	8957.52	27.76	753188.19	30895.04	39
297.98	24.10261	8929.76	28.99	722293.15	29967.43	40
306.23	23.81942	8900.77	30.37	692325.72	29065.6	41

1000Ay	aay	My	Cy	Ny	Dy	y
314.68	23.52932	8870.4	31.91	663260.12	28188.66	42
323.33	23.23229	8838.49	33.62	635071.46	27335.72	43
332.19	22.92831	8804.87	35.51	607735.74	26505.91	44
341.24	22.61736	8769.36	37.57	581229.83	25698.39	45
350.5	22.29947	8731.79	39.82	555531.44	24912.32	46
359.96	21.97463	8691.98	42.23	530619.12	24146.9	47
369.63	21.64285	8649.75	44.8	506472.22	23401.37	48
379.49	21.30414	8604.95	47.52	483070.85	22674.97	49
389.56	20.95851	8557.43	50.37	460395.88	21967.02	50
399.83	20.60593	8507.06	53.32	438428.86	21276.83	51
410.3	20.24637	8453.74	56.35	417152.03	20603.8	52
420.98	19.87976	8397.39	59.41	396548.23	19947.33	53
431.86	19.50599	8337.97	62.47	376600.9	19306.93	54
442.96	19.12491	8275.5	65.55	357293.97	18682.12	55
454.28	18.73637	8209.95	68.67	338611.84	18072.43	56
465.82	18.34024	8141.29	71.87	320539.41	17477.38	57
477.58	17.93641	8069.42	75.19	303062.03	16896.47	58
489.57	17.52483	7994.23	78.69	286165.56	16329.15	59
501.78	17.10548	7915.54	82.42	269836.41	15774.86	60
514.22	16.6784	7833.12	86.47	254061.55	15232.97	61
526.88	16.24372	7746.65	90.9	238828.58	14702.83	62
539.76	15.80166	7655.75	95.82	224125.76	14183.69	63
552.84	15.35253	7559.94	101.32	209942.07	13674.75	64
566.11	14.89679	7458.62	107.45	196267.31	13175.14	65
579.56	14.43495	7351.17	114.28	183092.17	12683.95	66
593.18	13.96762	7236.89	121.83	170408.22	12200.24	67
606.93	13.49545	7115.06	130.17	158207.98	11723.06	68
620.8	13.01921	6984.89	139.33	146484.92	11251.45	69
634.77	12.53972	6845.57	149.35	135233.48	10784.41	70
648.8	12.05791	6696.21	160.28	124449.07	10320.95	71
662.87	11.5748	6535.93	172.14	114128.13	9860.05	72
676.95	11.09149	6363.79	184.93	104268.07	9400.73	73
690.99	10.6092	6178.87	198.62	94867.35	8941.99	74
704.97	10.12921	5980.24	213.15	85925.36	8482.93	75
718.85	9.65291	5767.1	228.38	77442.43	8022.7	76
732.57	9.18172	5538.71	244.13	69419.73	7560.65	77
746.1	8.71708	5294.59	260.12	61859.08	7096.31	78
759.4	8.26047	5034.47	276.03	54762.77	6629.5	79
772.43	7.81337	4758.43	291.42	48133.27	6160.37	80
785.13	7.37722	4467.02	305.75	41972.9	5689.53	81
797.47	6.95342	4161.27	318.43	36283.37	5218.06	82
809.42	6.5433	3842.84	328.76	31065.3	4747.65	83

1000Ay	aay	My	Cy	Ny	Dy	y
820.93	6.14811	3514.08	336	26317.65	4280.61	84
831.97	5.76897	3178.07	339.41	22037.05	3819.93	85
842.52	5.40686	2838.67	338.27	18217.12	3369.26	86
852.55	5.0626	2500.39	332.03	14847.86	2932.85	87
862.03	4.73682	2168.36	320.32	11915	2515.4	88
870.97	4.42997	1848.04	303.07	9399.6	2121.82	89
879.35	4.14229	1544.97	280.6	7277.78	1756.95	90
887.17	3.8738	1264.37	253.61	5520.84	1425.17	91
894.44	3.62429	1010.77	223.19	4095.66	1130.06	92
901.17	3.39332	787.58	190.77	2965.6	873.95	93
907.37	3.18013	596.8	157.97	2091.65	657.73	94
913.1	2.98363	438.83	126.45	1433.92	480.6	95
918.37	2.80268	312.38	97.63	953.33	340.15	96
923.22	2.63612	214.75	72.55	613.18	232.61	97
927.69	2.48281	142.2	51.75	380.57	153.28	98
931.8	2.34164	90.44	35.35	227.29	97.06	99
935.59	2.21148	55.09	23.06	130.23	58.89	100
939.09	2.09118	32.04	14.31	71.34	34.11	101
942.35	1.97941	17.72	8.43	37.22	18.81	102
945.41	1.87441	9.29	4.69	18.42	9.83	103
948.35	1.77327	4.6	2.46	8.59	4.85	104
951.36	1.66988	2.13	1.21	3.75	2.24	105
954.88	1.54919	0.93	0.55	1.5	0.97	106
960.12	1.36917	0.37	0.23	0.53	0.39	107
970.87	1	0.14	0.14	0.14	0.14	108

المراجع

Bibliographie

[1] Ubaldo Nieto De Alba, Jesús Vegas Asensio. Matemática actuarial, Editorial Mapfre, Madrid 1993.
[2] Association pour la formation professionnelle en assurance. Assurance-vie actuel, Verlag SKV. Zurich 2002.
[3] M.-Y. Bachmann, H. Cattin, P. Epiney, F. Haeberly. Méthodes numériques. Monographie de la commission romande de mathématique. Éditions du Tricorne, Genève 1992.
[4] N.-L. Bowers, H.-U. Gerber, J.-C. Hickman, D.-A. Jones, C.-J Nesbitt. Actuarial Mathematics, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois 1986.
[5] Jacques Briere. Comprendre l'assurance-vie, Éditions Sécuritas, Paris 1988.
[6] Kenneth Black, Harold D. Skipper. Life Insurance, Twelfth edi- tion. Prentice Hall, Englewood Cliffs, USA, 1994.
[7] Philippe Chuard. Introduction aux mathématiques actuarielles de l'assurance sur la vie. Philippe Chuard, Pully, 1998.
[8] Charlie Jéquier. Assurances sur la vie. Exercices techniques. Éditions de la Concorde, Lausanne, 1934.
[9] Pierre Petauton. Théorie et pratique de l'assurance vie. Éditions Dunod, Paris 1998.
[10] Lewis C. Workman. Mathematical foundations of life insurance. Life Management Institute LOMA, Atlanta, Georgia, 1992.
[11] Julio G. Villalón. Ejercicios resueltos de matemáticas para las aplicaciones financieras y de seguros. Editorial centro de estudios Ramon Areces, S.A. Madrid, 1993.

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي– فرنسي

أ

ت

ح

خ

د

ر

رأس مال في حال البقاء على قيد الحياة	Capital en cas de vie, 147
رأس مال مؤجل	Capital differe, 147
رأس مال نهائي	Capital final, 25
ربحية	Profitabilite, 94

س

سعر الاستحقاق	Prix de remboursement,69
سعر الاكتتاب	Prix de souscription,69
سعر التداول	Cours, 74
سعر السند	Prix d une obligation,70
سعر الطرح	Prix d emission, 69
سلسلة	Chaine, 31, 51
سند	Obligation. 69
سندية	Obligataires, 63
سنوي	Annual, 30 / 360, 4

ش

شخص	Tete, 108
شخصين	Deux tetes, 138

ص

صافي القيمة الحالية	Valeur actuelle nette, 87
صافي القيمة الحالية NPV	VAN, 87

العلاوة المجزأة (FP)	PF, 163, 166
العلاوة المعاد حسابها سنويا (PRA)	PAR, 164, 168
العلاوة الوحيدة (UP)	PU, 163
علاوة تجارية	Prime commerciale, 167
علاوة سنوية	Prime annuelle, 165
علاوة صافية	Prime pure, 167
علاوة مترجة	Prime nivelee, 165
علاوة متوسطة	Prime moyenne, 169
علاوة مجزأة	Prime fractionnee, 166
عمر	Age, 10, 115
عمليات متسلسلة	Operation en chaines, 51

غ

غير مجزأة	Indivis, 63

ف

فائدة	Interet, 63
فائدة بسيطة	Interet simple, 15
فائدة جارية	Interet courus, 75
فائدة مركبة	Interet compose, 25
فترة	Duree, 3. 25
فترة استرداد	Delai de recuperation, 93
فعلي	Effectif, 34
في بي أي	VBA, 187

ق

قاعدة قاروب	Karup, 125
قاعدة ماكهام	Formule de Makeham, 118
قرض سندي	Emprunt obligataire, 69
قروض	Emprunts, 63
قسط أبدي	Rente perpetuelle, 56
قسط أي كان	Rente quelconque, 59
قسط دوري	Annuite, 43, 63
قسط دوري ثابت	Annuite constante, 67
قسط عمري	Rente viagiere, 44
قسط ما بعد العد	Rente postnumerando, 47,134,-136
قسط ما قبل العد	Rente praenumerando, 47, 134, 135
قسط مجزئ، إيرادات مجزأة	Rente fractionnee, 58, 137
قسط مؤجل	Rente differee, 57
قسط مؤقت	Rente temporaire, 44
قسمة بيومترية	Valeur biometrique, 107, 114
القيمة الاسمية	Valeur nominale, 69
القيمة الاسمية	Pair, 69
القيمة التخريدية (خردة)	Valeur residuelle, 82, 87
القيمة الحالية	Valeur actuelle, 29, 43, 45, 47
القيمة المستقبلية	Valeur acquise, 29
القيمة النهائية	Valeur finale, 29, 43, 46, 48



ل

م

ن

و

ثانياً: فرنسي – عربي

A

K

L

M



W

كشاف الموضوعات

ق



ن

و